OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026
Clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

Subiectul I

Calculați: a) $I=\int \frac{1+e^x}{1+x+e^x}dx$ **și** $J=\int \frac{x}{1+x+e^x}dx,\ x\in(0,\infty)$**;**

b) $K=\int \frac{arctgx}{x^4+x^2}dx, x\in(0,\infty)$.

REZOLVARE

a) $I=\int \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x}dx$ ……………………………………………1p

$I=\ln|1+x+e^x|+C$……………………………………………1p

$x\in(0,\infty)$deci $1+x+e^x>0$……………………………………………1p

$|1+x+e^x|=1+x+e^x$……………………………………………1p

$I=\ln(1+x+e^x)+C$……………………………………………1p

$I+J=\int \frac{1+x+e^x}{1+x+e^x}dx$……………………………………………1p

$I+J=\int 1dx$……………………………………………1p

$I+J=x+C$……………………………………………1p

$J=x-I$……………………………………………1p

$J=x-\ln(1+x+e^x)+C$……………………………………………1p

b) $K=\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}arctgxdx=\int (\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})arctgxdx=\int \frac{1}{x^2}arctgxdx-\int \frac{1}{x^2+1}arctgxdx$……2p

$\int \frac{1}{x^2+1}arctgxdx=\int (arctgx)'arctgxdx=\frac{1}{2}(arctgx)^2+C$……………………2p

$\int \frac{1}{x^2}arctgxdx=\int \left(\frac{-1}{x}\right)'arctgxdx=\frac{-1}{x}arctgx+\int \frac{1}{x}(arctgx)'dx=\frac{-1}{x}arctgx+\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$………3p

$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int \frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$…3p

$K=-\frac{1}{x}arctgx+\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}(arctgx)^2+C$……………………………………1p

Subiectul II

Fie $(G,\cdot)$ un grup și e elementul său neutru.

a) Dacă elementele $a,b\in G$ verifică relațiile $a^4b=ba$ și $a^6=e$, arătați că $ab=ba$.

b) Dacă $x^3=e$ și $x^2y^2=y^2x^2, \forall x,y\in G$ arătați că G este comutativ.

REZOLVARE

a) $a^4b=ba\Rightarrow a^4bb^{-1}=bab^{-1}\Rightarrow a^4=bab^{-1}$……………………………………2p

$a^4=bab^{-1}\Rightarrow(a^4)^3=(bab^{-1})^3\Rightarrow a^{12}=bab^{-1}bab^{-1}bab^{-1}\Rightarrow a^{12}=ba^3b^{-1}$………………4p

$a^{12}=(a^6)^2=e^2=e$……………………………………………1p

$ba^3b^{-1}=e\Rightarrow ba^3b^{-1}b=eb\Rightarrow ba^3=b\Rightarrow b^{-1}ba^3=b^{-1}b\Rightarrow a^3=e$……………………2p

$a^4b=a^3ab=eab=ab$……………………………………………2p

Deci $ab = ba$……………………………………………………………………………………………1p

b) $x^2y^2 = y^2x^2 \Rightarrow x^3y^2 = xy^2x^2 \Rightarrow ey^2 = xy^2x^2 \Rightarrow y^2 = xy^2x^2$……………………………..…2p

$y^2 = xy^2x^2 \Rightarrow y^2x = xy^2x^3 \Rightarrow y^2x = xy^2e \Rightarrow y^2x = xy^2$……………………………….………..2p

$y^2x = xy^2 \Rightarrow y^3x = yxy^2 \Rightarrow ex = yxy^2 \Rightarrow x = yxy^2$……………………………….……………..2p

$x = yxy^2 \Rightarrow xy = yxy^3 \Rightarrow xy = yxe \Rightarrow xy = yx, \forall x, y \in G$……………………………......2p

Deci G este comutativ………...………………………………………………………………..1p

Subiectul III

Determinați funcțiile $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ care admit o primitivă F cu proprietatea că $2xF(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0,\infty)$.

REZOLVARE

F derivabilă pe $(0,\infty)$și $F'(x) = f(x), \forall x \in (0,\infty)$……...……………………………………...1p

$2xF(x) = f(x) \Rightarrow 2x = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)}, \forall x \in (0,\infty)$…………….………………………………..3p

$\Rightarrow \int 2xdx = \int \frac{F'(x)}{F(x)}dx \Rightarrow x^2 + C = \ln|F(x)| + C \Rightarrow \ln|F(x)| = x^2 + c, c \in \mathbb{R}$…………….…..…6p

Din enunț $F(x) = \frac{f(x)}{2x} > 0, \forall x \in (0,\infty) \Rightarrow |F(x)| = F(x)$………...…………………………...3p

$\Rightarrow \ln F(x) = x^2 + c \Rightarrow F(x) = e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c$…………………………………………………….2p

$\Rightarrow F(x) = ke^{x^2}, k > 0, \forall x \in (0,\infty)$..………………………………………………………….2p

$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 2kxe^{x^2}, x \in (0,\infty)$……………………………………………………………..2p

f astfel obținută verifică condițiile din enunț ……………………………………………………..2p

Subiectul IV

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit și H_1, H_2subgrupuri ale lui G. Fie $H_1H_2 = \{xy/x \in H_1, y \in H_2\}$. Dacă $\max\{ord(H_1), ord(H_2)\} > \frac{1}{2}ord(G)$demonstrați că $H_1H_2 = G$.

REZOLVARE

Presupunem că $ord(H_1) \geq ord(H_2)$deci $ord(H_1) > \frac{ord(G)}{2}$...2p

Din Teorema lui Lagrange avem $ord(H_1)/ord(G)$..3p

Prin urmare $ord(H_1) = ord(G)$...4p

$ord(H_1) = ord(G), H_1 \subset G \Rightarrow H_1 = G$..3p

$H_1H_2 = GH_2 = \{xy/x \in G, y \in H_2\}$...2p

Fie e elementul neutru al lui G. Atunci $e \in H_2$..2p

$\forall x \in G, x = x \cdot e \in GH_2 \Rightarrow G \subset GH_2$...3p

Deoarece $GH_2 \subset G$și $G \subset GH_2$atunci $G = GH_2 = H_1H_2$...2p

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Din oficiu se acordă 16 puncte.