MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

S.S.M.R.- filiala Botoșani

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI
07.02.2026

Clasa a XII-a

Subiectul I (21 puncte)

Calculați: **a)** $I = \int \frac{1+e^x}{1+x+e^x}dx$ și $J = \int \frac{x}{1+x+e^x}dx,\ x \in (0,\infty)$;

b) $K = \int \frac{arctgx}{x^4+x^2}dx, x \in (0,\infty)$.

Subiectul II (21 puncte)

Fie $(G,\cdot)$ un grup și e elementul său neutru.

a) Dacă elementele $a,b \in G$ verifică relațiile $a^4b = ba$ și $a^6 = e$, arătați că
$$ab = ba.$$

b) Dacă $x^3 = e$ și $x^2y^2 = y^2x^2, \forall x,y \in G$ arătați că G este comutativ.

Subiectul III (21 puncte)

Determinați funcțiile $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ care admit o primitivă F cu proprietatea că $2xF(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0,\infty)$.

(Supliment Gazeta Matematică)

Subiectul IV (21 puncte)

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit și H_1, H_2 subgrupuri ale lui G. Fie $H_1H_2 = \{xy / x \in H_1, y \in H_2\}$. Dacă $\max\{ord(H_1), ord(H_2)\} > \frac{1}{2}ord(G)$ demonstrați că $H_1H_2 = G$.

Notă:

- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 16 puncte din oficiu.**