OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026
Clasa a XI-a
Barem de corectare și notare

Subiectul I (25 puncte)

Fie matricea $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ și λ_1, λ_2 soluțiile ecuației $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$, unde $tr(A)$ este urma matricei A, iar $\det(A)$ este determinantul matricei A.

a) Arătați că $A^n = \alpha_n \cdot A - \det(A) \cdot \alpha_{n-1} \cdot I_2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $\alpha_n = \dfrac{\lambda_1^{\,n} - \lambda_2^{\,n}}{\lambda_1 - \lambda_2}$, dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ și $\alpha_n = n \cdot \lambda_1^{\,n-1}$, dacă $\lambda_1 = \lambda_2$.

b) Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde $A = \begin{pmatrix} 1-a+a^2 & 1-a \\ a-a^2 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}$.

a) Demonstrație prin inducție matematică 12p

b) $tr(A) = 1 + a^2$, $\det(A) = a^2$, deci $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a^2$ 3p

Dacă $a \in \{-1,1\}$, atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $A^n = nA - (n-1)I_2$ 3p

Dacă $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$, atunci $A^n = \dfrac{1-a^{2n}}{1-a^2} A - a^2 \dfrac{1-a^{2n-2}}{1-a^2} I_2, n \in \mathbb{N}^*$ 3p

Oficiu 4p

Subiectul II (25 puncte)

Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $6AB = 2A + 3B$. Arătați că $AB = BA$.

Din $6AB = 2A + 3B$, obținem $6AB - 2A - 3B + I_n = I_n$ 3p

de unde $2A(3B - I_n) - I_n(3B - I_n) = I_n$ și $(2A - I_n)(3B - I_n) = I_n$ 6p

adică matricele $2A - I_n$ și $3B - I_n$ sunt una inversa celeilalte 3p

Atunci are loc și $(3B - I_n)(2A - I_n) = I_n$, de unde $6BA = 2A + 3B$ 6p

Atunci $6AB = 6BA$, de unde $AB = BA$ 3p

Oficiu 4p

Subiectul III (25 puncte)

a) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

b) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \dfrac{k^p}{n^{p+1}}} - 1 \right)$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

a) Folosind teorema Stolz-Cesaro pentru șirurile $a_n = 1^p + 2^p + ... + n^p$ și $b_n = n^{p+1}$ care este strict crescător și nemărginit, cu $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 3p

găsim $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, ... 3p

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{p+1}$ 3p

b) Prin amplificare cu conjugatul $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k^p}{n^{p+1}}}-1\right) = \frac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^p}{\sqrt{1+\frac{k^p}{n^{p+1}}}+1}$ 3p

Avem inegalitățile $\sqrt{1+\frac{1}{n^{p+1}}}+1 < \sqrt{1+\frac{k^p}{n^{p+1}}}+1 < \sqrt{1+\frac{n^p}{n^{p+1}}}+1 = \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 3p

Atunci $y_n < x_n < z_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $y_n = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \frac{1^p+2^p+...+n^p}{\sqrt{1+\frac{1}{n^p}}+1}$ și $z_n = \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \frac{1^p+2^p+...+n^p}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ 3p

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2(p+1)}$, din criteriul cleștelui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2(p+1)}$ 3p

Oficiu 4p

Subiectul IV (25 puncte)

Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_{n+1} = \frac{4x_n+1}{2x_n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$ și $x_0 = a, a \geq 0$.

a) Arătați că șirul este convergent, $\forall a \geq 0$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(S:L25.411 – GM 12/2025 –enunț modificat)

a) $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Se demonstrează prin inducție că:

Dacă $a=1$ atunci $x_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent..................... 2p

Dacă $a \in [0,1)$ atunci $x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ 2p

Dacă $a \in (1,\infty)$ atunci $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ 2p

$x_{n+1} - x_n = \frac{(1-x_n)(2x_n+1)}{2x_n+3}, \forall n \in \mathbb{N}$ 2p

Dacă $a \in [0,1)$ atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător și cum este și mărginit superior de 1 este convergent 3p

Dacă $a \in (1,\infty)$ atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător și cum este și mărginit inferior de 1 este convergent 3p

b) Șirul fiind convergent, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ 1p

Trecem la limită în relația de recurență și obținem $2l^2 - l - 1 = 0$, cu soluțiile $l_1 = 1, l_2 = -\frac{1}{2}$ 3p

Cum $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă $l \geq 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1, \forall a \geq 0$ 2p

Oficiu 4p

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Din oficiu se acordă 16 puncte.