MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

S.S.M.R.- filiala Botoșani

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI
07.02.2026

Clasa a XI-a

Subiectul I (25 puncte)

Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{C})$ și λ_1, λ_2 soluțiile ecuației $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$, unde $tr(A)$ este urma matricei A, iar $\det(A)$ este determinantul matricei A.

a) Arătați că $A^n = \alpha_n \cdot A - \det(A) \cdot \alpha_{n-1} \cdot I_2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $\alpha_n = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$, dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2$ și $\alpha_n = n \cdot \lambda_1^{n-1}$, dacă $\lambda_1 = \lambda_2$.

b) Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$, unde $A = \begin{pmatrix} 1-a+a^2 & 1-a \\ a-a^2 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}$.

Subiectul II (25 puncte)

Fie matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $6AB = 2A + 3B$. Arătați că $AB = BA$.

Subiectul III (25 puncte)

a) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \dfrac{k^p}{n^{p+1}}} - 1 \right)$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

Subiectul IV (25 puncte)

Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_{n+1} = \dfrac{4x_n + 1}{2x_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N}$ și $x_0 = a, a \geq 0$.

a) Arătați că șirul este convergent, $\forall a \geq 0$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(S:L25.411 – GM 12/2025 –enunț modificat)

Notă:
- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**