OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI
07.02.2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X - a

Subiectul I (25 puncte)

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $(f\circ f)(x)=-x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

a) f este bijectivă, b) f nu este monotonă, c) $f(0)=0$.

Din oficiu .... $(4p)$

a) Folosim faptul că dacă $u\circ v$ este bijectivă, atunci u este surjectivă și v injectivă (sau varianta mai generală) .... $(2p)$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x$ este bijectivă .... $(2p)$

$\Rightarrow f\circ f$ bijectivă $\Rightarrow f$ bijectivă........ $(3p)$

b) Presupunând prin absurd că f este monotonă $\Rightarrow f\circ f$ crescătoare........ $(3p)$

$g(x)=-x$ strict descrescătoare (contradicție) .... $(2p)$

$\Rightarrow f$ nu este monotonă........ $(1p)$

c) Pentru $x=0\Rightarrow f(f(0))=0\Rightarrow f(f(f(0)))=f(0)$........ $(2p)$

Pentru $x\to f(x)\Rightarrow f(f(f(x)))=-f(x)$........ $(2p)$

$\Rightarrow f(f(f(0)))=-f(0)$........ $(2p)$

Deci $f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0$........ $(2p)$

Subiectul II (25 puncte)

a) Considerăm $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$. Să se demonstreze că $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, cu egalitate dacă și numai dacă există $\lambda>0$ astfel încât $z_1=\lambda z_2$.

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația

$$z^n+\frac{i}{2}z^{n-1}+\frac{i^2}{2^2}z^{n-2}+\frac{i^3}{2^3}z^{n-3}+\ldots+\frac{i^{n-1}}{2^{n-1}}z+\frac{i^n}{2^n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

are o soluție de modul 1 dacă și numai dacă n este multiplu de 4.

Din oficiu .... $(4p)$

a) Demonstrarea inegalității și a cazului de egalitate .... $(4p)$

b) Presupunem că z este soluția cu $|z|=1$. Prin înmulțire cu 2^n se obține:

$(*)$ $\quad (2z)^n + i(2z)^{n-1} + i^2(2z)^{n-2} + \ldots + i^{n-1}(2z) + i^n = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow$ .... $(1p)$

$2^{n+1} - 1 = \left|(2z)^n + i(2z)^{n-1} + i^2(2z)^{n-2} + \ldots + i^{n-1}(2z) + i^n\right| \le |2z|^n + |2z|^{n-1} + \ldots + |2z| + 1 =$

$= 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow$ inegalitățile se transformă în egalitate............................ $(4p)$

Deci există numerele reale pozitive α_1, α_2, ..., α_n astfel încât

$(2z)^n = \alpha_1 \cdot i(2z)^{n-1} = \alpha_2 \cdot i^2(2z)^{n-2} = \ldots = \alpha_{n-1} \cdot i^{n-1}(2z) = \alpha_n \cdot i^n$ .... $(2p)$

trecând la module $\Rightarrow 2^n = \alpha_1 \cdot 2^{n-1} = \alpha_2 \cdot 2^{n-2} = \ldots = \alpha_{n-1} \cdot 2 = \alpha_n \Rightarrow z = i$ .... $(2p)$

revenind în $(*)$ $\Rightarrow (2i)^n + i(2i)^{n-1} + i^2(2i)^{n-2} + \ldots + i^{n-1}(2i) + i^n = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow$ .... $(2p)$

$\Rightarrow i^n\left(2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1\right) = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow i^n = 1$ deci n este multiplu de 4....................... $(2p)$

Reciproc, dacă n este multiplu de 4 se verifică imediat că $z = i$ este soluție .... $(4p)$

Subiectul III (25 puncte)

Determinați $z_1, z_2 \in \{z = x + iy \,/\, x, y \ge 0\}$ cu $z_1 z_2 = 2i$ și $|z_1 + z_2| = 2$.

(Supliment - Gazeta Matematică)

Din oficiu .... $(4p)$

$|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$, $\arg z_1 = \alpha_1$, $\arg z_2 = \alpha_2$

$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ și $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$.. $(1p)$

$r_1 r_2 = 2$ și $\alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$ .... $(3p)$

$|z_1 + z_2|^2 = \left|(r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2) + i(r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2)\right|^2 =$ .... $(1p)$

$= r_1^2\cos^2\alpha_1 + r_2^2\cos^2\alpha_2 + 2r_1r_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + r_1^2\sin^2\alpha_1 + r_2^2\sin^2\alpha_2 + 2r_1r_1\sin\alpha_1\sin\alpha_2 =$ .... $(2p)$

$= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.. $(2p)$

Cum $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \ge 0$ .... $(3p)$

cu egalitate $\Leftrightarrow \alpha_1 = \dfrac{\pi}{2}, \alpha_2 = 0$ sau invers.. $(2p)$

Așadar $|z_1 + z_2|^2 \ge r_1^2 + r_2^2 \ge 2r_1r_2$ ultima inegalitate devine egalitate pentru $r_1 = r_2$ .... $(3p)$

$|z_1+z_2|^2 \geq 4 \Rightarrow |z_1+z_2| \geq 2$, egalitate pentru $r_1=r_2=\sqrt{2}$ și $\alpha_1=\frac{\pi}{2}, \alpha_2=0$ sau invers........ $(2p)$

$(z_1,z_2) \in \{(\sqrt{2}, i\sqrt{2}); (i\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ .... $(2p)$

Subiectul IV (25 puncte)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2}+4^x \cdot log_3(x-2)=4^x+32^x$.

(Gazeta Matematică)

Din oficiu... $(4p)$

Condiție de existență: $x>2$ .... $(2p)$

$2^{x^2}+4^x \cdot log_3(x-2)=4^x+32^x \Leftrightarrow 2^{x^2-2x}+log_3(x-2)=1+2^{3x}$ .... $(3p)$

$f:(2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=2^{x^2-2x}+log_3(x-2)-1-2^{3x}$

$f(5)=0 \Rightarrow 5$ este soluție.. $(3p)$

$x \in (2,5) \Rightarrow 2^{x^2-2x}<2^{3x}$ și $log_3(x-2)<1 \Rightarrow f(x)<0$ deci x nu e soluție .... $(6p)$

$x>5 \Rightarrow 2^{x^2-2x}>2^{3x}$ și $log_3(x-2)>1 \Rightarrow f(x)>0$ deci x nu e soluție .... $(6p)$

$x=5$ soluție unică.. $(1p)$