MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

S.S.M.R.- filiala Botoșani

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI
07.02.2026

Clasa a X - a

Subiectul I (25 puncte)

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ f)(x) = -x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) f este bijectivă, b) f nu este monotonă, c) $f(0) = 0$.

Subiectul II (25 puncte)

a) Considerăm $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Să se demonstreze că $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, cu egalitate dacă și numai dacă există $\lambda > 0$ astfel încât $z_1 = \lambda z_2$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația

$$z^n + \frac{i}{2} z^{n-1} + \frac{i^2}{2^2} z^{n-2} + \frac{i^3}{2^3} z^{n-3} + \ldots + \frac{i^{n-1}}{2^{n-1}} z + \frac{i^n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

are o soluție de modul 1 dacă și numai dacă n este multiplu de 4.

Subiectul III (25 puncte)

Determinați $z_1, z_2 \in \{z = x + iy \,/\, x, y \ge 0\}$ cu $z_1 z_2 = 2i$ și $|z_1 + z_2| = 2$.

(Supliment - Gazeta Matematică)

Subiectul IV (25 puncte)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{x^2} + 4^x \cdot \log_3(x-2) = 4^x + 32^x$.

(GM. 10/2025)

Notă:

- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**