OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026
Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

Problema 1. (21 puncte)

a) Determinați $n \in N^*$ pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=59.$$

b) Fie a, b, c numere naturale nenule, astfel încât: $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b \cdot c$.

<u>Soluție:</u>

a) După raționalizare, se obține:

$\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots.+\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=59$.................................... 8 puncte

$\sqrt{n}-1=59$.. 3 puncte

$N = 3600$ .... 3 puncte

b) $E(a,b,c)=\frac{a}{a}+\frac{100}{a}+\frac{b}{b}+\frac{100}{b}+\frac{c}{c}+\frac{100}{c}=3+\left(\frac{100}{a}+\frac{100}{b}+\frac{100}{c}\right)=$.................... 3 puncte

$=3+\frac{100bc+100ac+100ab}{a \cdot b \cdot c}=3+100=103$.. 4 puncte

Problema 2. (21 puncte)

Se consideră relația: $\sqrt{a^4-4a^2+5}+\sqrt{b^6-16b^3+68}+\left|a^2-b+c-\sqrt{2}\right|=3$

a) Determinați numerele reale pozitive a, b, c care verifică relația de mai sus.

b) Verificați dacă numărul $\left(\frac{a+c}{b}\right)^{2026}$ este număr rațional.

<u>Soluție:</u>

a) $\sqrt{(a^2-2)^2+1}+\sqrt{(b^3-8)^2+4}+\left|a^2-b+c-\sqrt{2}\right|=3$.................................. 6 puncte

$\sqrt{(a^2-2)^2+1} \geq 1, \sqrt{\left(b^3-8\right)^2+4} \geq 2$, $\left|a^2-b+c-\sqrt{2}\right| \geq 0$....................................... 6 puncte

Se obține $a=\sqrt{2}, b=2, c=\sqrt{2}$.. 6 puncte

b) $\left(\frac{a+c}{b}\right)^{2026}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^{2026}=2^{1013}$ este număr rațional ....3 puncte

Problema 3. (21 puncte)

În cubul ABCDA'B'C'D', punctele M și N sunt proiecțiile punctului D' pe diagonalele A'C, respective AC'. Să se arate că:

a) A'C ⊥ (D'MB'); b) MN ∥ (ABC).

<u>Soluție:</u>

a) D'B' ⊥ (ACC'), de unde rezultă că: D'B' A'C... 5 puncte

Dar, A'C ⊥ D'M, A'C ⊥B'D', D'M, D'B'⊥ (D'MB'), D'M ⋂ D'B' ={ D'}, de unde rezultă că A'C ⊥ (D'MB') .... 6 puncte

b) Se demonstrează că A'M = C'N .... 3 puncte

Dacă A'C ⋂ AC' ={O}, atunci, A'O = C'O, obținem $\frac{A^1M}{MO}=\frac{C^1N}{NO} \Rightarrow MN \| A^1C^1$ .... 5 puncte

Dar A'C' ∥ AC, AC ⊂ (ABC), de unde MN ∥ (ABC)... 2 puncte

Problema 4. (21 puncte)

Se consideră piramida patrulateră regulată SABCD cu muchia bazei AB = 24 cm și muchia laterală SA = $12\sqrt{3}$cm. Fie M mijlocul segmentului BC și T punctul situat pe muchia DC, pentru care ST+TM este minimă. Determinați lungimea segmentului CT. *(Gazeta Matematică)*

Soluție:

Din desfășurarea laterală a piramidei, ST+TM este minimă când S, T și M sunt coliniare……. 5 puncte

Fie SN⊥CD, N∈CD, se obține SN = $12\sqrt{2}$cm, CN = 12 cm ……………………..…………… 3 puncte

Se notează $CT = x \Rightarrow NT = 12 - x$,

$\Delta SNT \sim \Delta MCT \Rightarrow \frac{SN}{MC} = \frac{NT}{CT} = \frac{ST}{MT} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{12} = \frac{12-x}{x}$……………………………………….……... 10 puncte

Se obține $x = 12(\sqrt{2} - 1)$cm ……………………………..…………………………………… 3 puncte

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Din oficiu se acordă 16 puncte.