MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

S.S.M.R.- filiala Botoșani

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

Educăm pentru viitor!

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026
Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

Subiectul I (21 puncte)

Se consideră expresia E= $\frac{3x+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(8+\sqrt{3})^2}}{x+3}$, unde $x \neq -3$. Aflați numerele întregi x pentru care expresia este număr întreg.

<u>Soluție:</u>

$\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.. 3 puncte

$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}$.. 3 puncte

$\sqrt{(8+\sqrt{3})^2} = |5+\sqrt{3}| = 8+\sqrt{3}$.. 3 puncte

Arată că E = $\frac{3x+11}{x+3}$.. 3 puncte

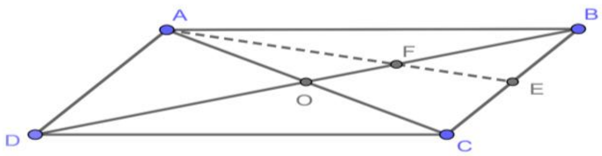
E = $\frac{3x+11}{x+3} \in \mathbb{Z}$ dacă x+3/2.. 5 puncte

x+3∈ $\mathcal{D}_2 = \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow x \epsilon \{-2,-4,-1,-5\}$.. 4 puncte

Subiectul II (21 puncte)

Se consideră paralelogramul *ABCD* și punctul *E*, mijlocul laturii *BC*. Dacă alegem punctul $F \in (BD)$ astfel încât *DF*= *2BF*, demonstrați că punctele *A*, *F* și *E* sunt coliniare.

<u>Soluție:</u>



DF=2FB⇒ DB=3FB⇒$FB = \frac{BD}{3}$

Dar, BD=2BO, deci $FB = \frac{2BO}{3}$... 8 puncte

Cum (BO) mediană în ΔABC, F∈(BO), obținem că F este centrul de greutate al ΔABC......... 8 puncte

(AE)mediană, F=centrul de greutate ⇒A,F,E coliniare.. 5 puncte

Subiectul III (21 puncte)

Se consideră numărul $A = \sqrt{\overline{a,b(cd)} + \overline{b,c(da)} + \overline{c,d(ab)} + \overline{d,a(bc)}}$, unde *a*, *b*, *c*, *d* sunt cifre nenule distincte.

a) Demonstrați că $1 \leq 0{,}3 \cdot A \leq \sqrt{3}$;

b) Câte numere $\overline{abcd}$ există dacă A ∈ $\mathbb{Q}$?

<u>Soluție:</u>

a) Obține $A = \sqrt{\frac{10(a+b+c+d)}{9}} = \frac{\sqrt{10(a+b+c+d)}}{3}$.. 5 puncte

a, b, c, d sunt cifre nenule distincte⇒1+2+3+4≤a+b+c+d≤6+7+8+9,deci 10≤a+b+c+d≤30….. 3 puncte

Finalizează și obține $1 \leq 0{,}3 \cdot A \leq \sqrt{3}$.. 3 puncte

b) A ∈$\mathbb{Q}$⇒(a+b+c+d)=10k^2, unde k∈$\mathbb{N}$.. 3 puncte

$10 \leq a+b+c+d \leq 30 \Rightarrow 10 \leq 10k^2 \leq 30 \Rightarrow k=1 \Rightarrow a+b+c+d=10$.. 4 puncte

$\Rightarrow a,b,c,d \in \{1,2,3,4\}$, deci sunt $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ de numere.. 3 puncte

Subiectul IV (21 puncte)

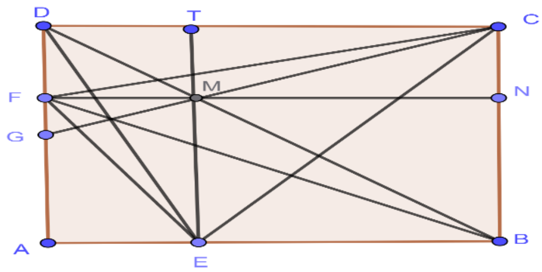
Se consideră dreptunghiul *ABCD* și un punct *M* pe diagonala *BD*. Notăm cu *E* și *F* picioarele perpendicularelor din *M* pe laturile *AB* respectiv *AD*. Știind că $ME + MF = AB$, arătați că:

a) *ABCD* este pătrat;

b) dreptele *CM*, *DE* și *BF* sunt concurente.

Gazeta matematică 9/2025

Soluție:



a) AEMF dreptunghi $\Rightarrow MF=AE, ME=AF$

$AB=AE+EB=MF+EB=MF+ME \Rightarrow ME=EB \Rightarrow \Delta MEB$ dr. isoscel $\Rightarrow \sphericalangle EBM=45^\circ$

Deci (BD bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow$ ABCD pătrat.. 4 puncte

b) ABCD pătrat, $M \in BD \Rightarrow$ DTMF și MNBE pătrate, unde $FM \cap BC=\{N\}$, iar $ME \cap DC=\{T\}$.... 2 puncte

$\Delta CNM \equiv \Delta FME$(c.c.) $\Rightarrow \sphericalangle MCN \equiv \sphericalangle MFE$.

Dacă $CM \cap AD=\{G\} \Rightarrow \sphericalangle CMN \equiv \sphericalangle FMG$.

Cum $\sphericalangle MCN+\sphericalangle CMN=90^\circ$, obținem $\sphericalangle FMG+\sphericalangle MFE=90^\circ$

$\Rightarrow CG \perp FE$, deci CM înălțime în ΔCFE (1).. 4 puncte

$\Delta CFD \equiv \Delta DEA$(c.c.) $\Rightarrow \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle FCD$.

Cum $\sphericalangle FCD+\sphericalangle CFD=90^\circ$, obținem $\sphericalangle ADE+\sphericalangle CFD=90^\circ$

$\Rightarrow CF \perp DE$, deci ED înălțime în ΔCFE (2).. 4 puncte

$\Delta CEB \equiv \Delta BFA$(c.c.) $\Rightarrow \sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle BCE$.

Cum $\sphericalangle BCE+\sphericalangle BEC=90^\circ$, obținem $\sphericalangle ABF+\sphericalangle BEC=90^\circ$

$\Rightarrow CE \perp FB$, deci FB înălțime în ΔCFE (3).. 4 puncte

Din (1), (2) și (3) obținem că CM, DE și BF sunt concurente.. 3 puncte

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Din oficiu se acordă 16 puncte.