OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026

Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I

a) Aflați numărul natural n din proporția:

$$\frac{3^n+1}{3^n}=\frac{15\cdot 4^n+4\cdot 5^n}{15\cdot 4^n}$$

b) Aflați numerele naturale x și y astfel încât: $x+y=10$ și

$$\frac{x+2y}{3x+5y+6}=\frac{2x+3y+4}{5x+7y+28}$$

REZOLVARE:

a) $\frac{3^n+1}{3^n}=\frac{15\cdot 4^n+4\cdot 5^n}{15\cdot 4^n}\rightarrow\frac{1}{3^n}=\frac{4\cdot 5^n}{15\cdot 4^n}$ ....**5 puncte**

$15\cdot 4^n=4\cdot 15^n$ ....**4 puncte**

$15\cdot 4^n=4\cdot 15^n$ ....**2 puncte**

b) $\frac{(x+y)+y}{3(x+y)+2y+6}=\frac{2(x+y)+y+4}{5(x+y)+2y+28}$ .... **3 puncte**

$\frac{10+y}{36+2y}=\frac{24+y}{78+2y}$ ....**2 puncte**

$\frac{y+10}{18+y}=\frac{24+y}{39+y}=\frac{(24+y)-(y+10)}{(39+y)-(18+y)}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$ ....**3 puncte**

$3y+30=36+2y\rightarrow y=6$ și $x=4$ ....**2 puncte**

Subiectul II

a) Aflați perechile de numere naturale care verifică egalitatea: $xy+2x+3y=15$.

b) Fie a un număr natural cu proprietatea că mulțimea $A=\{a;a+1;a+2;\dots;a+9\}$ conține patru numere divizibile cu 3. Arătați că a este divizibil cu 3.

REZOLVARE:

a) $x(y+2)+3(y+2)=15+6$ ....**4 puncte**

$(y+2)\cdot(x+3)=21=1\cdot 21=3\cdot 7$ ....**4 puncte**

$y+2=1$ sau $x+3=21$ și invers - nu convine..**1 puncte**

$y+2=7$ sau $x+3=3\rightarrow x=0$ și $y=5$ ....**1 puncte**

$y+2=3$ sau $x+3=7\rightarrow x=4$ și $y=1$ ....**1 puncte**

b) Realizăm următoarea partiție a mulțimii A: $\{a;a+3;a+6;a+9\}$, $\{a+1;a+4;a+7\}$ $\{a+2;a+5;a+8\}$..**4 puncte**

Fiecare submulțime conține elemente care dau același rest prin împărțirea la 3...................... **3 puncte**

Deoarece sunt patru numere divizibile prin 3, rezultă că elementele divizibile prin 3 sunt în prima mulțime a partiției. Deci a este divizibil prin 3.. **3 puncte**

Subiectul III

Se consideră 359 de unghiuri cu măsurile $m_1,m_2,\dots,m_{359}$. Știind că: $\frac{m_1}{\frac{1}{1\cdot 2}}=\frac{m_2}{\frac{1}{2\cdot 3}}=\dots=\frac{m_{359}}{\frac{1}{359\cdot 360}}$ și

$m_1+m_2+\dots+m_{359}=\frac{359}{360}\cdot 250$, determinați unghiurile ale căror măsuri se exprimă prin numere naturale.

REZOLVARE:

$\frac{m_1}{\frac{1}{1\cdot 2}} = \frac{m_2}{\frac{1}{2\cdot 3}} = \cdots = \frac{m_{359}}{\frac{1}{359\cdot 360}} = \frac{m_1+m_2+\cdots+m_{359}}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{359\cdot 360}}$..**4 puncte**

$= \left(\frac{359}{360}\cdot 250\right) : \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{359\cdot 360}\right)$...**3 puncte**

$= \left(\frac{359}{360}\cdot 250\right) : \left(\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{360}{359\cdot 360}-\frac{359}{359\cdot 360}\right)$...**3 puncte**

$= \frac{359\cdot 250}{360} : \frac{360-1}{360} = 250$...**3 puncte**

$\frac{m_1}{\frac{1}{1\cdot 2}} = 250 \rightarrow m_1 = 125^0 \in N$...**2 puncte**

$\frac{m_2}{\frac{1}{2\cdot 3}} = 250 \rightarrow m_2 = \frac{250}{6}^0 \notin N$...**2 puncte**

$\frac{m_{359}}{\frac{1}{359\cdot 360}} = 250 \rightarrow m_{359} = \frac{250}{359\cdot 360}^0 \notin N$..**2 puncte**

$250 = 2\cdot 5^3 \rightarrow 250$ nu se divide cu nici un alt produs de două numere consecutive, cu excepția lui $1\cdot 2$, așadar $m_1 = 125^0$ este singura măsură exprimată printr-un număr natural. ....**2 puncte**

Subiectul IV

a) Aflați restul împărțirii numărului 1408^{2026} la 9

b) Care este cel mai mic număr natural n pentru care există numerele naturale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3 = 1408^{2026}$?

Gazeta Matematică 9/2025

REZOLVARE:

a) $1408^{2026} = 1408^{2025}\cdot 1408 = (1408^{675})^3\cdot 1408$ .... **3 puncte**
Numărul 1408=3k+1, la orice putere este de forma 3k+1→ $(1408^{675})^3 = M_9 + 1$.... **3 puncte**
$= 1408\cdot(M_9+1) = 1408\cdot M_9 + 1408 = M_9 + 1408$.. **2 puncte**
$= M_9 + 9\cdot 156 + 4 = M_9 + 4$ Așadar restul este 4.. **2 puncte**

b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3 = 1408^{2026}$
$\rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3 = 1408^{2025}\cdot 1408 = (1408^{675})^3\cdot 1408$ .... **3 puncte**
$= (1408^{675})^3\cdot(1^3 + 4^3 + 7^3 + 10^3)$ .... **3 puncte**
$= (1\cdot 1408^{675})^3 + (4\cdot 1408^{675})^3 + (7\cdot 1408^{675})^3 + (10\cdot 1408^{675})^3$.................. **3 puncte**

Care este cel mai mic număr natural n pentru care există numerele naturale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_n^3 = 1408^{2026}$ este 4...**2 puncte**

Oficiu.. **16 puncte**

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.