MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

S.S.M.R.- filiala Botoșani

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

Educăm pentru viitor!

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026
Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

Subiectul I (21 puncte)

a) Să se calculeze a^{b^c} știind că: $4\cdot(5^b+\overline{aa})+2^c=1501_{(7)}$.

b) Comparați numerele 17^{14} și $\overline{ab}^{11}$, unde $\overline{ab}$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea $\overline{ab}-\overline{ba}=18$.

Soluție:

a) $1501_{(7)}=589$………………………………………… 3 puncte
$4\cdot(5^b+\overline{aa})+2^c=589$
Se observă că $4\cdot(5^b+\overline{aa})$ este număr par și 589 este număr impar
Folosind relația din enunț, deducem că 2^c este număr impar deci $c=0$ ………………… 3 puncte
$4\cdot(5^b+\overline{aa})+2^0=589\rightarrow 4\cdot(5^b+\overline{aa})=588\rightarrow 5^b+\overline{aa}=147$………… 2 puncte
Egalitatea poate avea loc pentru $b\leq 3$………………………………… 1 punct
Dacă $b=0$, atunci $\overline{aa}=146$, imposibil
Dacă $b=1$, atunci $\overline{aa}=142$, imposibil
Dacă $b=2$, atunci $\overline{aa}=122$, imposibil
Dacă $b=3$, atunci $\overline{aa}=22$, de unde se obține $a=2$……………………… 1 punct
$a^{b^c}=2^{3^0}=2$………………………………………… 1 punct

b) $\overline{ab}-\overline{ba}=18\rightarrow 9a-9b=18\rightarrow a-b=2$……………………… 3 puncte
$\overline{ab}$ este cel mai mic $\rightarrow \overline{ab}=31\rightarrow \overline{ab}^{11}=31^{11}$……………………… 2 puncte
$17^{14}>16^{14}=(2^4)^{14}=2^{56}$………………………………………… 3 puncte
$2^{56}>2^{55}=(2^5)^{11}>31^{11}$. Deci $17^{14}>\overline{ab}^{11}$……………………… 2 puncte

Subiectul II (21 puncte)

Diferența a două numere naturale este 22. Dacă împărțim numerele la 7 și respectiv 5 obținem aceleași câturi și aceleași resturi. Aflați numerele.

Soluție:

Fie a și b cele două numere cu $a>b$. Avem: $a-b=22$
$a:7=c$, rest r $\rightarrow a=7c+r$, unde $r<7$……………………………… 3 puncte
$b:5=c$, rest r $\rightarrow b=5c+r$, unde $r<5$……………………………… 3 puncte
Deci $r<5\rightarrow r\in\{0,1,2,3,4\}$……………………………………… 4 puncte
$a=7c+r$
$\underline{b=5c+r}$
$a-b=(7c+r)-(5c+r)$……………………………………………… 4 puncte
$a-b=7c+r-5c-r\rightarrow a-b=2c$……………………………………… 2 puncte
Dar $a-b=22\rightarrow 22=2c\rightarrow c=11$……………………………………… 3 puncte
Dacă $r=0$ avem: $a=77$ și $b=a-22\rightarrow b=55$
Dacă $r=1$ avem: $a=78$ și $b=a-22\rightarrow b=56$
Dacă $r=2$ avem: $a=79$ și $b=a-22\rightarrow b=57$
Dacă $r=3$ avem: $a=80$ și $b=a-22\rightarrow b=58$
Dacă $r=4$ avem: $a=81$ și $b=a-22\rightarrow b=59$……………………………… 2 puncte

Subiectul III (21 puncte)

a) Într-o clasă cu 35 de elevi, numărul băieților este cu 2 mai mare decât jumătate din numărul fetelor. Aflați numărul băieților și a fetelor, apoi arătați că cel puțin 4 fete sunt născute în aceeași zi a săptămânii și cel puțin doi băieți sunt născuți în aceeași lună a anului.

b) Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Doi copii au șters câte patru numere și s-a observat că suma numerelor șterse de unul este de trei ori mai mare decât suma numerelor șterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe tablă?

Soluție:

a) Calculează și obțin că în clasă sunt 13 băieți și 22 de fete……………………………………...8 puncte
Sunt 13 băieți, iar anul are 12 luni, conform principiului cutiei rezultă că cel puțin 2 băieți sunt născuți în aceeași lună a anului………………………………………………………………………….. 2 puncte
Sunt 22 de fete și săptămâna are 7 zile conform principiului cutiei rezultă că cel puțin 4 fete sunt născute în aceeași zi a săptămânii………………………………………..…………….….. 2 puncte
b) Fie x suma numerelor șterse de primul elev, atunci $3x$ este suma numerelor șterse de al doilea elev……………………………………………………………………...…………….……… 2 puncte
Cei doi au șters împreună $x + 3x = 4x$……………………………………………………….……….. 2 puncte
După ce au șters suma $4x$, pe tablă a rămas suma:
70-$4x$ = a numărul rămas………………………...…………………………………….…. 2 puncte
70-4x este număr par……………………………………………………………..…………..….. 1 punct
a=6……………………………………………………………………………………..…..…. 2 puncte

Subiectul IV (21 puncte)

Arătați că numărul $N = 1725^{n+1} \cdot 2025^{n}$ se poate scrie ca sumă de trei pătrate perfecte distincte nenule, pentru orice număr natural n.

Gazeta Matematică 6-7-8/2025

Soluție:

Dacă n este număr par, atunci $n = 2k$
$N = 1725^{2k+1} \cdot 2025^{2k} = 1725^{2k} \cdot 1725 \cdot 2025^{2k}$……………………………………….…… 4 puncte
$N = (1725^{k} \cdot 2025^{k})^2 \cdot 1725$……………………………………………………………..…. 2 puncte
$N = (1725^{k} \cdot 2025^{k})^2 \cdot (40^2 + 10^2 + 5^2)$……………………………………………….……… 3 puncte
$N = (1725^{k} \cdot 2025^{k} \cdot 40)^2 + (1725^{k} \cdot 2025^{k} \cdot 10)^2 + (1725^{k} \cdot 2025^{k} + 5)^2$……………... 1 punct
Dacă n este număr impar, atunci $n = 2k + 1$
$N = 1725^{2k+2} \cdot 2025^{2k+1} = 1725^{2(k+1)} \cdot 2025 \cdot 2025^{2k}$…………………...............……. 5 puncte
$N = (1725^{k+1} \cdot 2025^{k})^2 \cdot 2025$………………………………………………………….…….2 puncte
$N = (1725^{k+1} \cdot 2025^{k})^2 \cdot (40^2 + 20^2 + 5^2)$……………………………………………….…… 3 puncte
$N = (1725^{k+1} \cdot 2025^{k} \cdot 40)^2 + (1725^{k+1} \cdot 2025^{k} \cdot 20)^2 + (1725^{k+1} \cdot 2025^{k} \cdot 5)^2$………… 1 punct

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.
Din oficiu se acordă 16 puncte.