**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**
**ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 07.02.2026**
**Clasa a IX-a**
**Barem de corectare și notare**

**Subiectul I**

Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

**REZOLVARE:**

Presupunem că $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in Q \to \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\in Q \to \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\in Q$……………………….……………6 p

Deducem $\sqrt{n+1}\in Q$și $\sqrt{n}\in Q$……………………………………………………………….……5p

Obținem n și n+1 pătrate perfecte………………………………………………………………5p

Dar pentru $n\geq 1$ diferența dintre două pătrate consecutive este strict mai mare decât 1……….….5p

**Subiectul II**

Fie ABC un triunghi și punctele $M\in(AB), N\in(AC)$ astfel ca $\frac{MB}{MA}+\frac{NC}{NA}=1$. Demonstrați că MN conține centrul de greutate al triunghiului ABC.

**REZOLVARE:**

Notăm $\frac{MB}{MA}=k$ și $\frac{NC}{NA}=p=1-k$ și G centrul de greutate.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$……………………………………………………………………………..5p

Găsim $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{GB}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{GA}=\frac{1-k}{1+k}\overrightarrow{GB}+\frac{-k}{1+k}\overrightarrow{GC}$ ………………………………………………...5p

$\overrightarrow{GN}=\frac{1}{1+p}\overrightarrow{GC}+\frac{p}{1+p}\overrightarrow{GA}=\frac{-p}{1+p}\overrightarrow{GB}+\frac{1-p}{1+p}\overrightarrow{GC}$…………………………………………………….…..5p

Dar M,G,N sunt coliniare numai dacă vectorii $\overrightarrow{GM}$ și$\overrightarrow{GN}$ sunt coliniari…………………………….…1p

Dar proporționalitatea coordonatelor este echivalentă cu k+p=1…………...…………………..….5p

**Subiectul III**

Fie *ABC* un triunghi oarecare, $E\in AB, F\in AC$ , astfel ca *BE*=*CF*. Dacă *M* și *N* sunt mijloacele segmentelor *EF* și *BC*, arătați că *MN* are aceeași direcție cu bisectoarea unghiului *BAC*.

**REZOLVARE:**

Notez BE=CF=k și a,b,c lungimile laturilor BC, CA și AB.

Se găsește $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}\right)$………………………………………………...……………5p

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{b}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right)$…………………………………..……………….6p

$\overrightarrow{AD}=\frac{bc}{b+c}\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right)$……………………………………………………..………………..5p

$\overrightarrow{MN} = \frac{k(b+c)}{2bc}\overrightarrow{AD}$, adică sunt coliniari……………………………………………..……..………..5p

**Subiectul IV**

a) Arătați că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $[x] + \left[x + \frac{3}{8}\right] = [2x]$.

*(Gazeta Matematică)*

**REZOLVARE:**

a) Demonstrează că $E(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - [2x]$ este 0 pe $[0,1)$……………………….………………..5p

Arată că E este nulă pe $\mathbb{R}$……………………………………………………………..…..………………5p

b) Ecuația este echivalentă cu $\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{3}{8}\right]$ (=n)……………………………………….……………….2p

Obține $x \in \left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$ și $x \in \left[n - \frac{3}{8}, n + \frac{5}{8}\right)$………………………………..…………………….6p

Soluția este reuniunea intervalelor de forma $\left[n - \frac{3}{8}, n + \frac{1}{2}\right)$ cu n din $\mathbb{Z}$……………………………..3p

***Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.***
***Din oficiu se acordă 16 puncte.***