

**Concursul Național de Matematică pentru clasele a V-a – a VIII-a****„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA” 2025****etapa județeană, 12.04.2025****clasa a VIII- a****BAREM****Subiectul I**

a) Arătați că  $4x^4 + y^4 = (2x^2 + y^2 - 2xy)(2x^2 + y^2 + 2xy)$ .

b) Arătați că numărul  $n = 4^{2025} + 5^{2024}$  nu este prim.

Soluție:

a)  $4x^4 + y^4 = 4x^4 + y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 =$  (1p)

$= (2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2 = (2x^2 + y^2 - 2xy)(2x^2 + y^2 + 2xy).$  (2p)

Sau desfacerea parantezelor din membrul drept al egalității și determinarea membrului stâng.

b)  $n = 4^{2025} + 5^{2024} = 4 \cdot 4^{2024} + 5^{2024} = 4 \cdot (4^{506})^4 + (5^{506})^4$  (2p)

Folosind descompunerea de la punctul a) obținem

$$n = (2 \cdot (4^{506})^2 + (5^{506})^2 - 2 \cdot 4^{506} \cdot 5^{506})(2(4^{506})^2 + (5^{506})^2 + 2 \cdot 4^{506} \cdot 5^{506})$$

de unde deducem ca n nu este prim. (2p)

**Subiectul II**Determinați numerele reale  $a, b, c$  pentru care:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 7 = a\sqrt{3} + b\sqrt{5} + c\sqrt{6}.$$

Soluție:

Prin aducere la același numitor se obține:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 7 = a\sqrt{3} + b\sqrt{5} + c\sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 14 = 2a\sqrt{3} + 2b\sqrt{5} + 2c\sqrt{6} \Leftrightarrow$$
 (2p)

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2a\sqrt{3} - 2b\sqrt{5} - 2c\sqrt{6} + 14 = 0 \Leftrightarrow$$
 (2p)

$$\Leftrightarrow (a - \sqrt{3})^2 + (b - \sqrt{5})^2 + (c - \sqrt{6})^2 = 0$$
 (2p)

Aflarea valorilor  $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{6}$  (1p)

**Subiectul III**Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de  $x - 2, x - 4$  și  $9 - x$ . Aflați valoarea lui  $x$  pentru care diagonala paralelipipedului are valoare minimă.

Soluție:

Folosind  $d = \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2 + (9-x)^2}$ , unde  $d$  este diagonala paralelipipedului, obținem prin calcul:

$$d = \sqrt{3x^2 - 30x + 101} = \sqrt{3x^2 - 30x + 75 + 26} = \quad (3p)$$

$$= \sqrt{3(x^2 - 10x + 25) + 26} = \sqrt{3(x-5)^2 + 26}. \quad (3p)$$

Valoarea minimă pentru  $d$  este  $\sqrt{26}$  și se obține dacă  $x = 5$ . (1p)

#### Subiectul IV

Pe planul dreptunghiului ABCD cu  $AB = 2\text{ cm}$  și  $BC = 6\text{ cm}$  se ridică perpendicularele AM, BN, CP și DQ cu  $AM = 2\text{ cm}$ ,  $BN = 4\text{ cm}$ ,  $CP = 8\text{ cm}$  și  $DQ = 6\text{ cm}$ .

- Arătați că punctele M, N, P și Q sunt coplanare;
- Aflați tangenta unghiului format de planele (ABC) și (MNP).

Soluție:

Se construiește  $ME \perp BN$  și  $QF \perp PC$ .

- $NE \parallel PF$  și  $NE = PF \Rightarrow NEFP$  paralelogram  $\Rightarrow EF \parallel NP$  (1p)  
Dar MEFQ este paralelogram de unde se deduce ca  $EF \parallel MQ$  (2) (1p)  
Din (1) și (2) deducem că  $NP \parallel MQ$  adică punctele M, N, P și Q sunt coplanare. (1p)  
Notăm cu R punctul în care dreapta MN intersectează planul (ABC) și cu S punctul în care dreapta MQ intersectează planul (ABC)  $\Rightarrow RS$  este dreapta de intersecție dintre planele (ABC) și (MNP). (1p)
- Dacă AT este perpendiculara din A pe RS avem din teorema celor trei perpendiculare că  $MT \perp RS \Rightarrow \angle MTA$  este unghiul plan asociat (1p)  
Deoarece  $\triangle MAS$  asemenea cu  $\triangle QDS$  deducem că  $AS = 3\text{ cm}$  (1p)  
Prin calcul  $\tan \angle MTA = \frac{MA}{AT} = \frac{2}{\frac{6}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$  (1p)