

Concursul Național de Matematică pentru clasele a V-a – a VIII-a

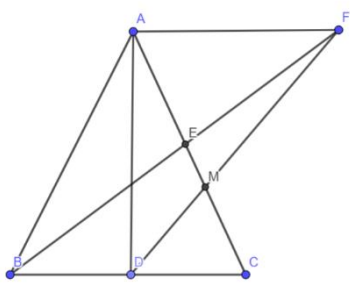
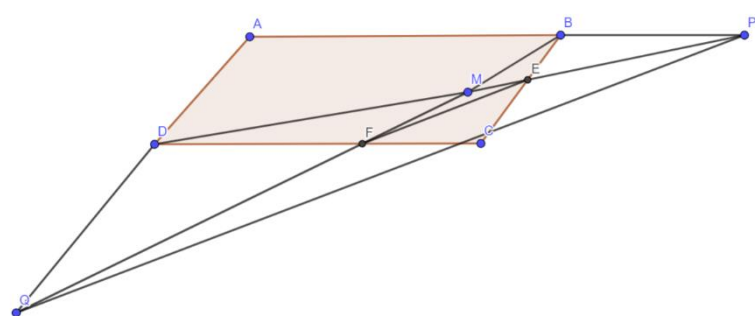
„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA” 2025

etapa județeană, 12.04.2025

clasa a VII- a

BAREM

SUBIECTUL I	7 puncte
a) Dacă $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - 3$, calculați a^{2025} .	
Aplică formula radicalilor compuși și obține: $a = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - 3$	2 p
$a = 1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 3$	0,5 p
$\sqrt{3} > \sqrt{1} \rightarrow 0 > \sqrt{1} - \sqrt{3} \rightarrow 1 - \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$	0,5 p
$a = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 - 3 \rightarrow a = -1$	0,5 p
$a^{2025} = (-1)^{2025} = -1$	0,5 p
b) Arătați că $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2025} \leq \frac{2025 \cdot 2029}{4}$.	
Demonstrează inegalitatea $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ cu egalitate pentru $a = b$	1 p
$\sqrt{1 \cdot 1} < \frac{1+1}{2}$	
$\sqrt{2 \cdot 1} < \frac{1+2}{2}$	
$\sqrt{3 \cdot 1} < \frac{3+1}{2}$	
$\dots$	
$\sqrt{2025} < \frac{2025+1}{2}$	1 p
Adunând relațiile obținem:	
$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2025} < \frac{2+3+4+\dots+2026}{2} < \frac{2025 \cdot 2029}{4}$	1 p
SUBIECTUL II	7 puncte
Fie $x, y \in Q^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025}$.	
Arătați că numărul $B = \sqrt{\left \frac{x}{15} - 135\right \cdot \left \frac{y}{15} - 135\right }$ este număr rațional.	
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2025} \rightarrow \frac{xy}{x+y} = \frac{15 \cdot 135}{1}$	3 p
$\left \frac{x}{15} - 135\right \cdot \left \frac{y}{15} - 135\right = \left \frac{x - 135 \cdot 15}{15}\right \cdot \left \frac{y - 135 \cdot 15}{15}\right $	1 p
$= \frac{1}{15^2} \cdot x - 2025 \cdot y - 2025 = \frac{1}{15^2} \cdot (x - 2025) \cdot (y - 2025) $	1 p
$= \frac{1}{15^2} \cdot \left \left(x - \frac{xy}{x+y}\right) \cdot \left(y - \frac{xy}{x+y}\right)\right = \frac{1}{15^2} \cdot \left \frac{x^2}{x+y} \cdot \frac{y^2}{x+y}\right = \frac{1}{15^2} \cdot \left \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2\right $	1 p
$= \left(\frac{1}{15} \cdot \frac{xy}{x+y}\right)^2$	

$B = \sqrt{\left(\frac{1}{15} \cdot \frac{xy}{x+y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{15} \cdot \frac{15 \cdot 135}{1}\right)^2} = 135 \in Q$	1 p
SUBIECTUL III	7 puncte
Fie triunghiul ABC isoscel de bază $BC = 12 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$, iar D și E mijloacele lui BC, respectiv AC. Paralela prin A la BC intersectează BE în F, $DF \cap AC = \{M\}$. a) Calculați aria triunghiului BAF; b) Calculați lungimea segmentului DM.	
 a) desen corect b) justifică că $\angle ADB = 90^\circ$ Aplică Pitagora în triunghiul ABD și află $AD = 8 \text{ cm}$ Demonstrează că $\triangle AEF \equiv \triangle BEC$, apoi demonstrează că ABCF paralelogram, deci $AF = BC = 12 \text{ cm}$. Justifică că AD are aceeași lungime cu înălțimea corespunzătoare lui AF în triunghiul BAF $A_{\triangle ABF} = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48 \text{ cm}^2$ c) $\left. \begin{array}{l} BE=EF \rightarrow CE \text{ mediană în } \triangle BCF \\ D \text{ mijlocul } BC \rightarrow FD \text{ mediană în } \triangle BCF \\ FD \cap CE = \{M\} \end{array} \right\} \rightarrow M - \text{centru de greutate}$ Calculează $DM = \frac{4\sqrt{13}}{3}$	1p 0,5 p 0,5 p 1 p 0,5 p 0,5 p 2 p 1 p
SUBIECTUL IV	7 puncte
Fie paralelogramul ABCD și un punct M care aparține interiorului unghiului $\angle BAD$ cu proprietatea $\angle MBA = \angle MDA$. Notăm cu P intersecția dreptelor MD și AB, cu Q intersecția dreptelor BM și AD, cu E intersecția dreptelor MD și BC, iar cu F intersecția dreptelor BM și CD. Arătați că $EF \parallel PQ$. <i>Gazeta matematică – numărul 1/ 2025</i>	
Desen corect	1 p
 $ABCD \text{ paralelogram} \rightarrow \angle ADC \equiv \angle ABC \left\{ \begin{array}{l} \angle MDC \equiv \angle MBE \\ \angle DMF \equiv \angle BME \end{array} \right\} \rightarrow \triangle DMF \sim \triangle BME$ $\angle ADM \equiv \angle MBA \text{ (ip)}$ $\frac{DM}{MB} = \frac{FM}{ME} = \frac{DF}{ME} \quad (1)$ $\angle MDQ = 180^\circ - \angle ADM \left\{ \begin{array}{l} \angle MDQ = \angle MBP \\ \angle MBP = 180^\circ - \angle MBA \end{array} \right\} \rightarrow \angle DMQ \equiv \angle BMP \rightarrow \triangle BMP \sim \triangle DMQ$ $\frac{MB}{DM} = \frac{MP}{MQ} = \frac{BP}{DQ} \quad (2)$ Din (1) și (2) $\rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{ME}{MF}$	2 p 2 p 0,5 p



$\rightarrow \frac{ME}{MP} = \frac{MF}{MQ}$	0,5 p
$\frac{ME}{MP - ME} = \frac{MF}{MQ - MF} \rightarrow \frac{ME}{EP} = \frac{MF}{FQ} \rightarrow EF \parallel PQ$	1 p