

Concursul Național de Matematică pentru clasele a V-a – a VIII-a**„OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA” 2025****etapa județeană, 12.04.2025****clasa a VI- a****Subiectul I**

Se consideră numărul $a = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \dots + \frac{50}{225} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{45} \right)$.

1) Arătați că a este număr natural, pătrat perfect.

2) Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

1) $a = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \dots + \frac{50}{225} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{45} \right);$

$$a = \frac{1}{5} + \frac{2+5}{2 \cdot 5} + \frac{3+5}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{45+5}{45 \cdot 5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{45} \right) \dots \dots \dots 2p$$

$$a = \frac{1}{5} + \frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{5}{2 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 5} \dots + \frac{45}{45 \cdot 5} + \frac{5}{45 \cdot 5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{45} \right);$$

$$a = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{45} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{45} \right) \dots \dots \dots 1p$$

$$a = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 45 = 9 \dots \dots \dots 1p$$

2) $\frac{9}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9 : 2n+1 \Rightarrow 2n+1 \in D_9 = \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\} \dots \dots \dots$

1p

$$2n = \{-10, -4, -2, 0, 2, 8\} \dots \dots \dots 1p$$

$$n = \{-5, -2, -1, 0, 1, 4\} \rightarrow n = \{0, 1, 4\} \dots \dots \dots 1p$$

dar $n \in \mathbb{N}$

Subiectul II

Un pachet de bomboane a fost împărțit la trei copii. Numărul bomboanelor primite de cei trei copii sunt invers proporționale cu numerele 20, 10, respectiv 12. Unul dintre copii observă că a primit mai puțin cu 90 de bomboane, decât ar fi primit, dacă același pachet de bomboane s-ar fi împărțit direct proporțional cu numerele 0,1; 0,2; respectiv 0,(3). Câte bomboane au fost în pachet? Câte bomboane a primit fiecare copil?

Soluție:

Fie a, b, c - numărul de bomboane primite de fiecare copil.

$$\{a, b, c\} \text{ i. p. } \{20, 10, 12\} \rightarrow a \cdot 20 = b \cdot 10 = c \cdot 12 = k \dots \dots \dots 2p$$

$a + b + c = x$, x fiind numărul total de bomboane

$$\frac{14k}{60} = x \rightarrow k = \frac{60x}{14};$$

$$a = \frac{3x}{14}; b = \frac{6x}{14}; c = \frac{5x}{14} \dots\dots\dots 1p$$

$$\{a, b, c\} d.p. \{0,1; 0,2; 0,(3)\} \rightarrow \dots \rightarrow a = \frac{t}{10}, b = \frac{t}{5}, c = \frac{t}{3} \dots\dots\dots 1p$$

$a + b + c = x$;

$$\frac{19t}{30} = x \rightarrow t = \frac{30x}{19};$$

$$a = \frac{3x}{19}, b = \frac{6x}{19}, c = \frac{10x}{19} \dots\dots\dots 1p$$

Verificăm pentru copilul 3 dacă a primit cu 90 de bomboane mai puțin.

$$\frac{10x}{19} - \frac{5x}{14} = 90 \rightarrow x = 532 \dots\dots\dots 1p$$

Împărțire invers proporțional $a = 114, b = 228, c = 190$

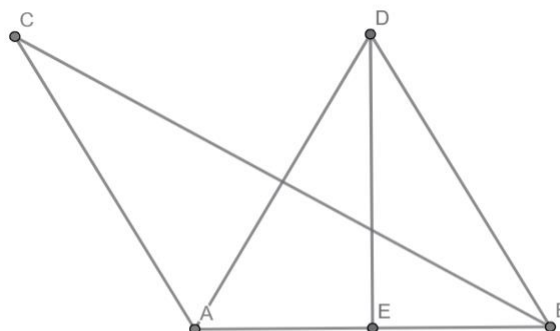
Împărțire direct proporțional $a = 84, b = 168, c = 280$

$$280 - 190 = 90 \text{ (corect)} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul III

Fie $\triangle ABC$ cu unghiul $\angle A$ de 120° . Bisectoarea unghiului A taie mediatoarea laturii AB în punctul D . Arătați că dreptele AC și BD sunt paralele.

Soluție



Desen corect.....2p

$(AD - \text{bisectoarea } \angle BAC \rightarrow \angle CAD \equiv \angle BAD = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$

$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } DE - \text{mediatoarea laturii } [AB] \\ D \in DE \end{array} \right\} \rightarrow BD = DA \rightarrow \triangle DAB - \text{isoscel} \dots\dots\dots 1p$

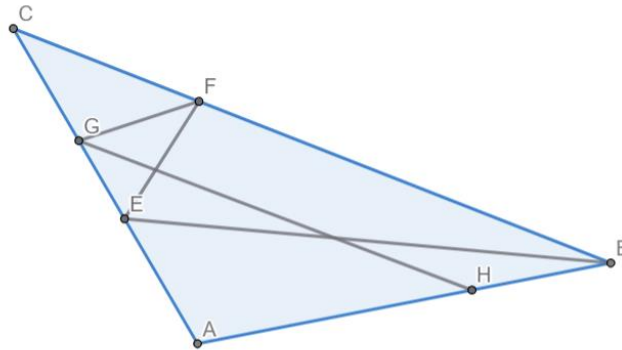
$\left. \begin{array}{l} \triangle DAB - \text{isoscel} \\ \text{dar } \angle BAD = 60^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \triangle DAB - \text{echilateral} \rightarrow \angle DBA = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$

$\angle DBA + \angle BAC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ \left(\begin{array}{l} \text{interne de aceeași parte a} \\ \text{secantei determinate} \\ \text{de dreptele } BC \text{ și } AD, \\ \text{tăiate de secanta } AB \end{array} \right) \rightarrow AC \parallel BD \dots\dots\dots 2p$

Subiectul IV

Fie ABC un triunghi obtuzunghic isoscel cu baza $[BC]$. Fie $(BE$ bisectoarea $\angle ABC$, $E \in AC$, $(EF$ bisectoarea $\angle BEC$, $F \in BC$, $(FG$ bisectoarea $\angle EFC$, $G \in AC$, $(GH$ bisectoarea $\angle EGF$, $H \in AB$. Știind că dreptele GH și BC sunt paralele, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

Soluție



Desen corect..... 2p

În $\triangle ABC$,

$$AB = CA \rightarrow \angle C \equiv \angle B = 2x \rightarrow \angle A = 180^\circ - 4x;$$

$$90^\circ < \angle A < 180^\circ \rightarrow 0^\circ < x < 22,5^\circ \dots\dots\dots 1p$$

În $\triangle BEC$,

$$\angle BEC = 180^\circ - 3x;$$

$$(EF - \text{bisectoarea } \angle BEC \rightarrow \angle BEF \equiv \angle CEF = \frac{\angle BEC}{2} = \frac{180^\circ - 3x}{2} = 90^\circ - \frac{3x}{2} \dots\dots\dots 1p$$

În $\triangle EFC$,

$$\angle EFC = 90^\circ - \frac{x}{2}$$

$$(FG - \text{bisectoarea } \angle EFC \rightarrow \angle EFG \equiv \angle GFC = \frac{\angle EFC}{2} = \frac{90^\circ - \frac{x}{2}}{2} = 45^\circ - \frac{x}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} GH \parallel BC \\ GF - \text{secantă} \end{array} \right\} \rightarrow \angle HGF \equiv \angle GFC = 45^\circ - \frac{x}{4} \text{ (alterne interne)}$$

$$(GH - \text{bisectoarea } \angle EGF \rightarrow \angle HGE \equiv \angle HGF = \frac{\angle EGF}{2} = 45^\circ - \frac{x}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} GH \parallel BC \\ AC - \text{secantă} \end{array} \right\} \rightarrow \angle HGE \equiv \angle BCA \text{ (corespondente)} \dots\dots\dots 1p$$

$$45^\circ - \frac{x}{4} = 2x \rightarrow x = 20^\circ \text{ (convine pt că } 0^\circ < x < 22,5^\circ) \rightarrow$$

$$\angle BAC = 100^\circ; \angle ABC \equiv \angle BCA = 40^\circ \dots\dots\dots 1p$$