OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VII-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

Arătați că, dacă $\sqrt{\overline{34xy}}$ este număr natural, atunci și $\sqrt{\overline{xy}}$ este număr natural, unde *x* și *y* sunt cifre nenule din sistemul zecimal.

Soluție:

$3400 < \overline{34xy} \leq 3499 \Rightarrow \sqrt{3400} < \sqrt{\overline{34xy}} \leq \sqrt{3499}$..**(2p)**

$58,30\ldots < \sqrt{\overline{34xy}} \leq 59,15\ldots$ ....**(1p)**

$\sqrt{\overline{34xy}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{\overline{34xy}} = 59 \Rightarrow \overline{34xy} = 59^2 = 3481$..**(2p)**

$\overline{xy} = 81 \Longrightarrow \sqrt{\overline{xy}} = 9 \in \mathbb{N}$..**(2p)**

Problema 2. (7 puncte)

a) Dați un exemplu de două numere naturale nenule *x* și *y*, care verifică relația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

b) Rezolvați ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, x, y \in \mathbb{Z}^*$.

Soluție:

a) Un exemplu dintre următoarele:

$x = 5, y = 20$, sau $x = 6, y = 12$, sau $x = y = 8$, sau $x = 12, y = 6$, sau $x = 20, y = 5$ ....**(1p)**

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{y} = \frac{y-4}{4y}$..**(1p)**

$x = \frac{4y}{y-4} \Longrightarrow x = \frac{4y-16+16}{y-4} \Longrightarrow x = 4 + \frac{16}{y-4}$ ....**(2p)**

$x \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow \frac{16}{y-4} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow y - 4 \in D_{16} \Longrightarrow y - 4 \in \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\}$..........................**(1p)**

$y \in \{-12, -4, 2, 3, 5, 6, 8, 12, 20\}$..**(1p)**

$(x, y) \in \{(3, -12), (2, -4)(-4, 2), (-12, 3), (20, 5), (12, 6), (8, 8), (6, 12), (5, 20)\}$..........................**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Se consideră trapezul dreptunghic *ABCD*, $AD \parallel BC, AD < BC, \sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, iar *M* este mijlocul laturii *AB*. Fie $CM \cap AD = \{N\}$. Se dă $DM \perp AC$.

a) Demonstrați că patrulaterul *ACBN* este paralelogram.

b) Demonstrați că $BD \perp MC$.

Soluție:

Desen corect...**(1p)**

a) $\Delta NAM \equiv \Delta CBM (C.U) \Rightarrow NA \equiv BC$ ....**(1p)**

$NA \equiv BC, NA \parallel BC \Rightarrow NACB$ este paralelogram...**(1p)**

b) $NACB$ este paralelogram $\Rightarrow NB \parallel AC$ ....**(1p)**

$DM \perp AC \Rightarrow DM \perp NB$ ....**(1p)**

În ΔDBN :

BA, *DM* sunt înălțimi, $BA \cap DM = \{M\} \Rightarrow$ *M* este ortocentrul $\Delta DBN \Rightarrow NM \perp BD \Rightarrow MC \perp BD$........**(2p)**

Problema 4. (7 puncte)

Se consideră triunghiul *ABC* și punctele *M* și *N* pe latura *BC*, astfel încât $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CAN$.

a) Arătați că $AC^2 = BC \cdot CN$.

b) Arătați că triunghiul *AMN* este isoscel.

Soluție:

Desen corect...**(1p)**

a)

$\sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle ACB, \sphericalangle CAN \equiv \sphericalangle ABC \Rightarrow \Delta ACN \sim \Delta BCA\ (U.U.)$ ....**(1p)**

$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow . AC^2 = BC \cdot CN$..**(1p)**

b) Fie $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB}, \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MBA \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBA\ (L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACB$ ....**(1p)**

$\sphericalangle AMN$ este unghi exterior $\Delta AMB \Rightarrow \sphericalangle AMN = \sphericalangle BAM + \sphericalangle ABM$ ....**(1p)**

$\sphericalangle ANM$ este unghi exterior $\Delta ANC \Rightarrow \sphericalangle ANM = \sphericalangle ACN + \sphericalangle NAC$...**(1p)**

Dar $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACN, \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM \Rightarrow \Delta AMN$ este isoscel.....................**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ţi-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!