



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„DIMITRIE POMPEIU”

9 - 11 mai 2025

EDIȚIA a XXIII - a



BAREM – CLASA a XI - a

1. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt continue în punctul 0 și care verifică relația $f(x) \cdot f(3x) \cdot f(9x) = 3^{13x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică, nr. 2/2025

Soluție:

Făcând $x = 0$ în relația din enunț, obținem $(f(0))^3 = 1$, de unde rezultă $f(0) = 1$.

..... 1 punct

Înlocuind x cu $3x$, relația din enunț devine $f(3x) \cdot f(9x) \cdot f(27x) = 3^{39x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Ținând cont că $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, prin împărțire deducem că $\frac{f(27x)}{f(x)} = \frac{3^{39x}}{3^{13x}}$, adică $f(27x) = 3^{26x} \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, (1).

..... 1 punct

Din (1) obținem succesiv $f(27^2 x) = 3^{26 \cdot 27x} \cdot f(27x) = 3^{26 \cdot 27x} \cdot 3^{26x} \cdot f(x) = 3^{(1+27) \cdot 26x} \cdot f(x)$.

Inductiv, găsim $f(27^n x) = 3^{(1+27+27^2+\dots+27^{n-1}) \cdot 26x} \cdot f(x)$, adică $f(27^n x) = 3^{(27^n - 1)x} \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

În ultima relație înlocuim x cu $\frac{x}{27^n}$ și obținem că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc

$$f(x) = 3^{\left(1 - \frac{1}{27^n}\right)x} \cdot f\left(\frac{x}{27^n}\right), \quad (2).$$

..... 2 puncte

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{27^n} = 0$ și f este continuă în 0, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{27^n}\right) = f(0) = 1$. Trecând la

limită pentru $n \rightarrow \infty$ în relația (2), deducem că $f(x) = 3^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

..... 2 puncte

Se verifică ușor că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ satisface condițiile din enunț.

..... 1 punct

2. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^k - 1}$. Dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție polinomială cu proprietatea că $f^{(2025)}(x) = \frac{g(x)}{(x^k - 1)^{2026}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$, calculați valoarea $g(1)$.

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ și $x > 1$, $f^{(m)}(x)$ reprezintă derivata de ordinul m a funcției f în punctul x .

Putnam, 2002

Soluție:

Vom demonstra prin inducție că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există o funcție polinomială $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$.

..... 1 punct

Avem $f'(x) = \frac{-k \cdot x^{k-1}}{(x^k - 1)^2}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$, deci putem lua $P_1(x) = -k \cdot x^{k-1}$.

..... 1 punct

Presupunem că, pentru $m \in \mathbb{N}^*$ avem $f^{(m)}(x) = \frac{P_m(x)}{(x^k - 1)^{m+1}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$. Atunci

$$f^{(m+1)}(x) = \left(f^{(m)}(x)\right)' = \frac{P_m'(x) \cdot (x^k - 1)^{m+1} - P_m(x) \cdot (m+1)(x^k - 1)^m \cdot kx^{k-1}}{(x^k - 1)^{2m+2}}.$$

Simplificând prin $(x^k - 1)^m$, obținem $f^{(m+1)}(x) = \frac{P_m'(x) \cdot (x^k - 1) - (m+1) \cdot kx^{k-1} \cdot P_m(x)}{(x^k - 1)^{m+2}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$.

Deoarece mulțimea funcțiilor polinomiale este închisă la adunare, înmulțire și derivare, putem considera funcția polinomială $P_{m+1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P_{m+1}(x) = P_m'(x) \cdot (x^k - 1) - (m+1) \cdot kx^{k-1} \cdot P_m(x)$, (*) și avem $f^{(m+1)}(x) = \frac{P_{m+1}(x)}{(x^k - 1)^{m+2}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$, ceea ce încheie demonstrația prin inducție.

..... 2 puncte

Pentru $n = 2025$ obținem $f^{(2025)}(x) = \frac{P_{2025}(x)}{(x^k - 1)^{2026}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$, iar din ipoteză

deducem că $g(x) = P_{2025}(x)$, pentru orice $x \in (1, \infty)$, adică funcțiile polinomiale g și P_{2025} coincid pe întreg intervalul $(1, \infty)$. Rezultă că $g(x) = P_{2025}(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $g(1) = P_{2025}(1)$.

..... 1 punct

Făcând $x = 1$ în (*), obținem $P_{m+1}(1) = -k(m+1)P_m(1)$, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$. Ținând cont că $P_1(1) = -k$, se obține imediat prin inducție că $P_m(1) = (-k)^m \cdot m!$, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ și atunci $g(1) = P_{2025}(1) = (-k)^{2025} \cdot 2025!$.

..... 2 puncte

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se consideră $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 - B^2 = \alpha(AB - BA)$.

a) Dacă $\alpha = 0$ și n este impar, demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$.

b) Dacă $\alpha \neq 0$, demonstrați că $(AB - BA)^n = O_n$.

Mihai Opincariu

Soluție:

Considerăm matricea $C = AB - BA$. Relația din ipoteză conduce imediat la egalitățile:

$$(A - B)(A + B) = (\alpha + 1)C \quad \text{și} \quad (A + B)(A - B) = (\alpha - 1)C. \quad (1)$$

..... 2 puncte

a) Dacă $\alpha = 0$, din (1) obținem $\det C = \det(-C) = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$. Cum n impar, avem $\det(-C) = (-1)^n \det(C) = -\det(C)$, deci $\det C = -\det(C)$. Rezultă $\det C = 0$.

..... 2 puncte

b) Dacă $\alpha = 1$ atunci, folosind (1), obținem $(A - B)(A + B) = 2C$ și $(A + B)(A - B) = O_n$, de unde $4C^2 = [(A - B)(A + B)]^2 = (A - B) \cdot [(A + B)(A - B)] \cdot (A + B) = O_n$, deci $C^2 = O_n$.

Analog, pentru $\alpha = -1$ avem $(A - B)(A + B) = O_n$ și $(A + B)(A - B) = -2C$, de unde $4C^2 = [(A + B)(A - B)]^2 = (A + B) \cdot [(A - B)(A + B)] \cdot (A - B) = O_n$, prin urmare $C^2 = O_n$.

Așadar, pentru $\alpha = \pm 1$ avem $C^2 = O_n$, de unde $C^n = O_n$.

..... 1 punct

În continuare presupunem că $\alpha \neq \pm 1$.

Cum $\det((A - B)(A + B) - xI_n) = \det((A + B)(A - B) - xI_n)$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$, obținem că $\det((\alpha + 1)C - xI_n) = \det((\alpha - 1)C - xI_n)$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Alegând $x = (\alpha + 1)y$, va rezulta că $\det(C - yI_n) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^n \det\left(C - \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}yI_n\right)$, pentru orice $y \in \mathbb{C}$, (2).

Fie λ o valoare proprie a lui C . Conform relației (2) și $\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \cdot \lambda$ este valoare proprie

pentru C . Inductiv, deducem că $\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^k \cdot \lambda$ este valoare proprie a lui C , pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă prin absurd $\lambda \neq 0$, întrucât $\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \neq \pm 1$, obținem că C are o infinitate de valori proprii, contradicție. Așadar matricea C are toate valorile proprii nule, iar din teorema Cayley-Hamilton obținem $C^n = O_n$.

..... 2 puncte

Problema suplimentară.

Ana și Bogdan au adaptat jocul „X și 0” la un context matematic. Pe o tablă 3×3 , Ana începe scriind numărul 1 într-un pătrățel, apoi Bogdan scrie 0 într-unul din pătrățelele vacante rămase; urmează din nou Ana cu un 1, apoi iar Bogdan cu un 0 ... și jocul continuă până când se completează întreaga tablă. La final se obține o matrice 3×3 care are cinci elemente egale cu 1 și patru elemente egale cu 0. Dacă această matrice este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ câștigă Ana, altfel câștigă Bogdan. Presupunând că ambii jucători urmăresc o strategie optimă, cine va câștiga jocul? Explicați strategia câștigătoare.

Putnam, 2002

Soluție:

Jucătorul care are strategie câștigătoare este Bogdan. Pentru a dovedi aceasta, vom arăta că Ana nu îl poate împiedica pe Bogdan să genereze în matricea finală A măcar una dintre următoarele trei situații:

$$\text{i) o linie } (0 \ 0 \ 0); \quad \text{ii) o coloană } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{ii) un minor } 2 \times 2 \text{ de forma } \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dacă A conține o linie (sau o coloană) cu toate elementele 0, atunci avem $\det(A) = 0$. Dacă A are un minor de ordin 2 cu cele patru elemente 0, atunci celelalte cinci elemente rămase în afara acelui minor sunt egale cu 1. Deducem că A conține două linii (și două coloane) identice, prin urmare $\det(A) = 0$. În fiecare dintre cele trei situații câștigă Bogdan.

Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$. Deoarece permutarea a două linii (coloane) ale lui A generează o matrice A' cu $\det(A') = -\det(A)$, fără a restrânge generalitatea putem presupune că Ana plasează

primul 1 în stânga sus, adică $a_{11} = 1$. Acum Bogdan joacă $a_{22} = 0$ și obținem matricea $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

După a doua mutare a Anei, fie linia 2, fie coloana 2 va avea ambele poziții rămase vacante. Fără a pierde generalitatea, presupunem că linia 2 este $(* \ 0 \ *)$. Acum Bogdan joacă $a_{23} = 0$,

obligând-o pe Ana să joace $a_{21} = 1$. Rezultă $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$, una dintre cele cinci „*” fiind deja 1.

De exemplu, în situația $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$, Bogdan joacă $a_{12} = 0$ și obține $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$. După a

patra mutare a Anei, una dintre pozițiile a_{13} sau a_{32} va fi neocupată, iar Bogdan va juca ultimul său 0 acolo, obținând fie situația ii), fie situația iii). Ultima mutare a Anei nu mai contează.

Similar se tratează și celelalte situații.