



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



Clasa a XI-a

Subiectul I (7 puncte)

Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt continue în punctul 0 și care verifică relația $f(x) \cdot f(3x) \cdot f(9x) = 3^{13x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Subiectul al II-lea (7 puncte)

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^{k-1}}$. Dacă $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție polinomială cu proprietatea că $f^{(2025)}(x) = \frac{g(x)}{(x^k - 1)^{2026}}$, pentru orice $x \in (1, \infty)$, calculați valoarea $g(1)$.

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$ și $x > 1$, $f^{(m)}(x)$ reprezintă derivata de ordinul m a funcției f în punctul x .

Subiectul al III-lea (7 puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se consideră $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 - B^2 = \alpha(AB - BA)$.

a) Dacă $\alpha = 0$ și n este impar, demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$.

b) Dacă $\alpha \neq 0$, demonstrați că $(AB - BA)^n = O_n$.

PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Ana și Bogdan au adaptat jocul „X și 0” la un context matematic. Pe o tablă 3×3 , Ana începe scriind numărul 1 într-un pătrățel, apoi Bogdan scrie 0 într-unul din pătrățelele vacante rămase; urmează din nou Ana cu un 1, apoi iar Bogdan cu un 0 și jocul continuă până când se completează întreaga tablă. La final se obține o matrice 3×3 care are cinci elemente egale cu 1 și patru elemente egale cu 0. Dacă această matrice este inversabilă în $M_3(\mathbb{R})$ câștigă Ana, altfel câștigă Bogdan. Presupunând că ambii jucători urmăresc o strategie optimă, cine va câștiga jocul? Explicați strategia câștigătoare.

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare dintre primele 3 subiecte se notează de la 0 la 7 puncte.