



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
 9 - 11 mai 2025
EDIȚIA a XXIII - a



BAREM - Clasa a X-a

Problema 1. Fie $n \geq 2$ și funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin

$$f(x) = \sum_{k=2}^n [\log_k x], \text{ pentru orice } x \geq 1.$$

- a) Demonstrați că $f(x) = f([x])$, pentru orice $x \geq 1$.
 b) Determinați numerele $n \geq 2$ pentru care f este surjectivă.

Soluție. a) Avem $[\log_k x] = p$ dacă și numai dacă $k^p \leq x < k^{p+1}$ **1p**
 Cum k^p este număr natural, acest lucru este echivalent cu $k^p \leq [x] < k^{p+1}$, adică $[\log_k [x]] = p$. Sumând pentru $k = 2, 3, \dots, n$, obținem concluzia **1p**
 b) Funcția f este crescătoare, întrucât și $\log$ și $[\cdot]$ sunt crescătoare (1) **1p**
 Dacă $n \geq 4$, pentru orice $x \in (3, 4)$ avem $f(x) = f([x]) = f(3) = 2$, iar $f(4) = 2 + 1 + 1 = 4$. Din (1) rezultă că $3 \notin \text{Im}(f)$, deci f nu este surjectivă **1p**
 Dacă $n = 2$, atunci $f(2^n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $\text{Im}(f) = \mathbb{N}$ **1p**
 Dacă $n = 3$, presupunând că există $t \in \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)$, conform (1), există $s \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(s+1) - f(s) \geq 2$, adică $[\log_2(s+1)] - [\log_2 s] + [\log_3(s+1)] - [\log_3 s] \geq 2$.. **1p**
 Dar $[\log_2(s+1)] - [\log_2 s] \leq 1$ și $[\log_3(s+1)] - [\log_3 s] \leq 1$, cu egalitate când $s+1$ este o putere a lui 2, respectiv o putere a lui 3, imposibil. Așadar, $n \in \{2, 3\}$ **1p**

Problema 2. Fie $n \geq 2$ și $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ pentru care $|z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_k}| \leq 1$, pentru orice submulțime nevidă $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Arătați că $|a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n| \leq 1$, pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$.
 b) Când avem egalitate la a), pentru $a_1, \dots, a_n \in (0, 1]$ distincte două câte două ?

Soluție. a) Considerăm $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Conform ipotezei, putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_1 \leq \dots \leq a_n$ (sau alt argument de aranjare) **1p**

Atunci $a_1 z_1 + \dots + a_n z_n = a_1(z_1 + z_2 + \dots + z_n) + (a_2 - a_1)(z_2 + z_3 + \dots + z_n) + (a_3 - a_2)(z_3 + \dots + z_n) + \dots + (a_n - a_{n-1})z_n$. Din inegalitatea modulului și folosind ipoteza, avem $|a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n| \leq a_1 |z_1 + \dots + z_n| + (a_2 - a_1) |z_2 + \dots + z_n| + \dots + (a_n - a_{n-1}) |z_n| \leq a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n \leq 1$ **3p**

b) Din $a_1 \neq 0$ și $a_i \neq a_{i+1}$, pentru orice $a_i = \{1, 2, \dots, n-1\}$, deducem că egalitatea implică $|z_i + z_{i+1} + \dots + z_n| = 1$, pentru orice $i = 1, \dots, n$. În particular $|z_n| = 1$, deci $z_n \neq 0$. În inegalitatea modulului, pentru egalitate, trebuie ca $z_n = x_{n-1}(z_n + z_{n-1}) = x_{n-2}(z_n + z_{n-1} + z_{n-2}) = x_1(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$, unde $x_1, \dots, x_{n-1} \geq 0$. Din $z_n \neq 0$, avem $x_i \neq 0$, deci există $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $z_i = y_i z_n$, pentru $i = 1, \dots, n-1$... **1p**

Dacă există $1 \leq k \leq n-1$ pentru care $z_k \neq 0$, îl alegem pe cel care are k maxim. Atunci $|z_k + z_n| = 1$, deci $|y_k + 1| = 1$. Cum $y_k \neq 0$, avem $y_k = -2$ ceea ce implică $|z_k| = 2|z_n| = 2$, lucru care contrazice ipoteza. Așadar cazurile de egalitate sunt pentru situația când exact unul dintre numerele z_i are modul 1 iar restul sunt nule **2p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$, mulțimea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ și $\mathcal{P} = \{X | X \subseteq A\}$ mulțimea părților lui A . Pentru o familie nevidă de submulțimi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ și pentru fiecare $X \in \mathcal{P}$, notăm cu $f_{\mathcal{F}}(X)$ numărul mulțimilor din $\mathcal{F}$ care includ pe X sau care sunt incluse în X .

a) Determinați $\sum_{X \in \mathcal{P}} f_{\mathcal{P}}(X)$.

b) Dacă n este par, determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia $\frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_{X \in \mathcal{P}} f_{\mathcal{F}}(X)$, când $\mathcal{F}$ parcurge familia submulțimilor nevide ale lui $\mathcal{P}$.

Soluție. a) Pentru $X \in \mathcal{P}$, dacă notăm cu $k = |X|$, suma $s = \sum_{X \in \mathcal{P}} f_{\mathcal{P}}(X)$ crește

cu 2^k (numărul de submulțimi ale lui X) și cu 2^{n-k} (numărul de mulțimi pentru care X este submulțime, adică cele de forma $X \cup Y$ cu $Y \subseteq A \setminus X$), iar mulțimea X este numărată de două ori, deci în total, s crește cu $2^k + 2^{n-k} - 1$ **1p**

Pentru fiecare $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, familia $\mathcal{P}$ are C_n^k mulțimi de cardinal k , deci $s = \sum_{k=0}^n C_n^k (2^k + 2^{n-k} - 1) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 2^k + \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 2^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k$ **1p**

Atunci $s = (1+2)^n + (2+1)^n - 2^n = 2 \cdot 3^n - 2^n$ **1p**

b) Notăm cu $q_{\mathcal{F}} = \sum_{X \in \mathcal{P}} f_{\mathcal{F}}(X)$. Pentru fiecare pereche $(F, P) \in \mathcal{F} \times \mathcal{P}$, suma q_F crește cu o unitate dacă $F \subseteq P$ sau dacă $P \subseteq F$. Atunci, similar cu raționamentul de la a), pentru $F \in \mathcal{F}$, dacă $|F| = k$, suma q_F crește cu $2^k + 2^{n-k} - 1$. Fie a_k numărul de submulțimi cu k elemente din $\mathcal{F}$, pentru fiecare $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Avem atunci $q_{\mathcal{F}} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (2^k + 2^{n-k}) - |\mathcal{F}|$ **3p**

Cum n este par, avem $q_{\mathcal{F}} + |\mathcal{F}| \geq \sum_{k=0}^n a_k \cdot 2^{\frac{n}{2}+1} = 2^{\frac{n}{2}+1} \cdot \sum_{k=0}^n a_k = 2^{\frac{n}{2}+1} \cdot |\mathcal{F}|$, deci $\frac{1}{|\mathcal{F}|} \cdot q_{\mathcal{F}} \geq 2^{\frac{n}{2}+1} - 1$. Egalitatea are loc când $\mathcal{F}$ are doar submulțimi de $\frac{n}{2}$ elemente **1p**

Problema 4. O mulțime de numere complexe A se numește *stabilă* dacă este finită și nevidă și dacă $z^n \in A$, pentru orice $z \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice mulțime stabilă A notăm cu $s(A)$ suma elementelor acesteia. Determinați mulțimea

$$S = \{s(A) | A \subset \mathbb{C} \text{ este stabilă}\}.$$

Soluție. Observăm că dacă $z \in A$ atunci $z = 0$ sau există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $z^n = 1$. Atunci $A \setminus \{0\} = \bigcup_{k=1}^m U_{n_k}$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$.

Avem $U_{t_1} \cap U_{t_2} \cap \dots \cap U_{t_i} = U_{(t_1, t_2, \dots, t_i)}$ iar cum $s(U_n) \in \{0, 1\}$, din principiul includerii și excluderii ne rezultă că $s(A) \in \mathbb{Z}$, deci $S \subseteq \mathbb{Z}$ (1).

Fie $k \in S$ și A cu $s(A) = k$. Atunci $A = \bigcup_{k=1}^m U_{n_k}$. Fie $p_1, p_2, \dots, p_6$ numere prime distincte care nu divid niciun n_i . Luăm $B = U_{p_1}$ și $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = k - 1$. Deci $k - 1 \in S$ (2). Fie $C = U_{p_1 p_2 p_3} \cup U_{p_1 p_4 p_5} \cup U_{p_2 p_4 p_6} \cup U_{p_3 p_5 p_6}$. Oricare două dintre cele 4 mulțimi menționate au intersecția diferită de U_1 și oricare trei au intersecția U_1 . Atunci, din principiul includerii și excluderii obținem $s(A \cup C) = k + 2$ (3). Din (1), (2) și (3) deducem că $S = \mathbb{Z}$.