



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
9 - 11 mai 2025
EDIȚIA a XXIII - a



Clasa a X-a

Problema 1. Fie $n \geq 2$ și funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin

$$f(x) = \sum_{k=2}^n [\log_k x], \text{ pentru orice } x \geq 1.$$

- a) Demonstrați că $f(x) = f([x])$, pentru orice $x \geq 1$.
- b) Determinați numerele $n \geq 2$ pentru care f este surjectivă.
(Am notat cu $[x]$ partea întregă a numărului real x)

Problema 2. Fie $n \geq 2$ și $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ pentru care $|z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_k}| \leq 1$, pentru orice submulțime nevidă $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Arătați că $|a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n| \leq 1$, pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$.
- b) Determinați cazurile de egalitate la a), în care numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$ sunt nenule și distincte două câte două.

Problema 3. Fie $n \geq 2$, mulțimea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ și $\mathcal{P} = \{X | X \subseteq A\}$ mulțimea părților lui A . Pentru o familie nevidă de submulțimi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ și pentru fiecare $X \in \mathcal{P}$, notăm cu $f_{\mathcal{F}}(X)$ numărul mulțimilor din $\mathcal{F}$ care includ pe X sau care sunt incluse în X .

- a) Determinați valoarea expresiei $\sum_{X \in \mathcal{P}} f_{\mathcal{P}}(X)$.
- b) Dacă n este par, determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua expresia

$$\frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_{X \in \mathcal{P}} f_{\mathcal{F}}(X),$$

când $\mathcal{F}$ parcurge familia submulțimilor nevide ale lui $\mathcal{P}$.

Problema 4. (Suplimentară) O mulțime de numere complexe A se numește *stabilă* dacă este finită și nevidă și dacă $z^n \in A$, pentru orice $z \in A$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice mulțime stabilă A notăm cu $s(A)$ suma elementelor acesteia. Determinați mulțimea

$$S = \{s(A) | A \subset \mathbb{C} \text{ este stabilă}\}.$$

Notă. Timpul de lucru este de 3 ore.

Fiecare dintre primele trei probleme se notează de la 0 la 7 puncte.