



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



**Clasa a VIII-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

NOTĂ:

- Fiecare corector acordă pe fiecare subiect un număr întreg de puncte.
- Diferența dintre punctajele acordate poate fi de maxim un punct.
- Punctajul final este media punctajelor acordate de cei doi corectori.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectul I (7 puncte)

a) Determinați numerele reale x, y, z pentru care

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Oficiu..... **1p**

C.E. $x-1 \geq 0, y-4 \geq 0, z-9 \geq 0$

Înmulțind cu 2 relația din enunț obținem:

$$2\sqrt{x-1} - x + 4\sqrt{y-4} - y + 6\sqrt{z-9} - z = 0 \quad /(-1)$$

$$x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} + z - 6\sqrt{z-9} = 0$$

$$(x-1-2\sqrt{x-1}+1) + (y-4-4\sqrt{y-4}+4) + (z-9-6\sqrt{z-9}+9) = 0$$

$$(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{z-9}-3)^2 = 0$$

$$\sqrt{x-1}-1=0 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-4}-2=0 \Rightarrow y=8$$

$$\sqrt{z-9}-3=0 \Rightarrow z=18$$

b) Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $a+b+c=2$

Arătați că $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+3} + \sqrt{3c+5} \leq 9$

$$\sqrt{3a+1} \leq \frac{3a+1+1}{2}$$

$$\sqrt{3b+3} \leq \frac{3b+3+1}{2}$$

$$\sqrt{3c+5} \leq \frac{3c+5+1}{2}$$

Adunând, obținem:

$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+3} + \sqrt{3c+5} \leq \frac{3(a+b+c) + 2 + 4 + 6}{2}$$

$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+3} + \sqrt{3c+5} \leq \frac{3 \cdot 2 + 12}{2}$$

$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+3} + \sqrt{3c+5} \leq 9$$

Subiectul al II-lea (7 puncte)

a) Descompuneți în factori expresiile: $2x^2+9x+10$ și $2x^2+11x+15$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $(2x^2+9x+10)(2x^2+11x+15)=18$



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



Soluție:

a) oficiu 1p

Avem $2x^2 + 9x + 10 = (x+2)(2x+5)$ și $2x^2 + 11x + 15 = (x+3)(2x+5)$ 2p

b) Ecuația din enunț este echivalentă cu ecuația:

$$(x+2)(x+3)(2x+5)^2 = 18 \Leftrightarrow (x^2 + 5x + 6)(2x+5)^2 = 18 \dots\dots\dots 1p$$

Înmulțim cu 4 ambii membri și obținem: $(4x^2 + 20x + 24)(4x^2 + 20x + 25) = 72$

Notăm $y = 4x^2 + 20x + 24$ și avem $y(y+1) = 72 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 289$, de unde $2y+1 \in \{-17, 17\}$

$y \in \{-9, 8\}$ 2p

Obține soluțiile $x = -4$ și $x = -1$ 1p

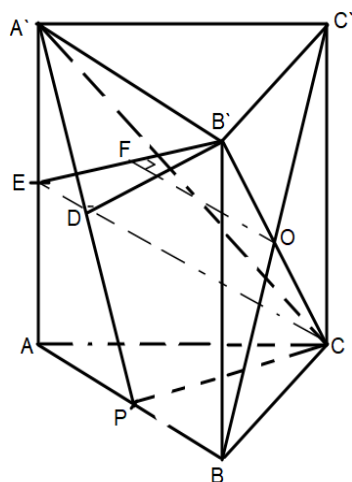
Subiectul al III-lea (7 puncte)

Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată dreaptă cu $AB = AA' = 2a$.

a) Dacă P este mijlocul muchiei AB calculați distanța de la B' la planul $(A'PC)$.

b) Dacă E este mijlocul muchiei AA' , calculați distanța dintre dreptele EB' și BC' .

Gazeta Matematică



Soluție:

Oficiu

1
p

a) Dacă P este mijlocul $[AB]$ în triunghiul ABC echilateral $\Rightarrow CP \perp AB$.

Construim $B'D \perp A'P$.

Din $AA' \perp (ABC)$ și $CP \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp CP$



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



Din $CP \perp AA'$ și $CP \perp AB \Rightarrow \left. \begin{array}{l} CP \perp (A'AB) \\ B'D \subset (A'AB) \end{array} \right\} \Rightarrow CP \perp B'D \dots\dots\dots$

Din $B'D \perp CP$ și $B'D \perp A'P \Rightarrow B'D \perp (A'PC) \Rightarrow B'D = d(B', (A'PC))$.

Din $\Delta A'AP \Rightarrow A'P = a\sqrt{5}$.

$$A_{\Delta A'PB'} = \frac{1}{2} A'B' \cdot d(P, A'B') = 2a^2$$

$$A_{\Delta A'PB'} = \frac{1}{2} A'P \cdot B'D = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot B'P$$

Obținem $B'P = \frac{4a\sqrt{5}}{5} \dots\dots\dots 3p$

b) Notăm $BC' \cap B'C = \{O\}$; i construim $OF \perp EB'$, $F \in (EB')$.
 $\Delta EB'C$ isoscel și $[EO]$ mediană $\Rightarrow EO \perp BC'$

Din $BC' \perp EO$ și $BC' \perp B'C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BC' \perp (EB'C) \\ OF \subset (EB'C) \end{array} \right\} \Rightarrow BC' \perp OF$.

Deci OF este perpendiculara comună a dreptelor EB' și BC'

OF înălțime în triunghiul $EOB' \Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{30}}{2} \dots\dots\dots 3p$

PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Soluție: Punctele E și F sunt mijloacele muchiilor $[A'B']$ și $[BC]$