CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „DIMITRIE POMPEIU”

ediția a XXIV – a

Botoșani, 08.05.2026

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

NOTĂ:

- Fiecare corector acordă pe fiecare subiect un număr întreg de puncte.
- Diferența dintre punctajele acordate poate fi de maxim un punct.
- Punctajul final este media punctajelor acordate de cei doi corectori.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectul I (7 puncte)

SI.	**1.** a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $4x^2+6y^2-10\sqrt{2}\cdot x-10\sqrt{3}\cdot y+25=0$ b) Rezolvați ecuația: $\left\{\frac{2x+1}{3}\right\}\cdot\left[\frac{2x+1}{3}\right]=2$, în mulțimea numerelor întregi. Am notat $\{a\}$și $[a]$, partea fracționară , respectiv partea întreagă a numărului real a.	
	Soluție:	
	a) Ecuația se mai scrie $2\left(2x^2-5\sqrt{2}x+\frac{25}{4}\right)+2\left(3y^2-5\sqrt{3}y+\frac{25}{4}\right)=0$................................	1p
	$2\left(\sqrt{2}x-\frac{5}{2}\right)^2+2\left(\sqrt{3}y-\frac{5}{2}\right)^2=0$	1p
	Finalizare..	1p
	b) x ∈ $\mathbb{Z}$, deci x poate avea una din formele x=3k, x=3k+1 sau x=3k+2, unde k ∈ $\mathbb{Z}$	1p
	Dacă x=3k, atunci $\frac{2x+1}{3}=\frac{6k+1}{3}=2k+\frac{1}{3}$, deci $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=2k$, iar $\left\{\frac{2x+1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$ Dacă x=3k+1, atunci $\frac{2x+1}{3}=\frac{6k+3}{3}=2k+1$, deci $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=2k+1$, iar $\left\{\frac{2x+1}{3}\right\}=0$ Dacă x=3k+2, atunci $\frac{2x+1}{3}=\frac{6k+5}{3}=2k+1+\frac{2}{3}$, deci $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=2k+1$, iar $\left\{\frac{2x+1}{3}\right\}=\frac{2}{3}$..........	1p
	Obține soluțiile x = 9 și x = 5	1p
	Oficiu……………………………………………………………………………………..	1p
SII.	**2. a)** Descompuneți în factori $4n^4+1\,,n\in\mathbb{N}^*$. **b)** Determinați partea întreagă a numărului $A=\frac{4}{5}+\frac{8}{65}+\frac{12}{325}+\cdots+\frac{4\cdot2026}{4\cdot2026^4+1}$.	
a)	***Soluție:*** $4n^4+1=(2n^2)^2+4n^2+1-4n^2=(2n^2+1)^2-(2n)^2=(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1)$ sau $[n^2+(n+1)^2][n^2+(n-1)^2]$	2p
	b) Scrie fracțiile de tipul $\frac{4n}{4n^4+1}=\frac{1}{2n^2-2n+1}-\frac{1}{2n^2+2n+1}$ Atunci, $\frac{4}{5}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}$ $\frac{8}{65}=\frac{1}{5}-\frac{1}{13}$ $\frac{12}{325}=\frac{1}{13}-\frac{1}{25}$	

$$\frac{4\cdot 2026}{4\cdot 2026^4+1}=\frac{1}{2\cdot 2026^2-2\cdot 2026+1}-\frac{1}{2\cdot 2026^2+2\cdot 2026+1}$$

Mai arată că , $2n^2-2n+1=2(n-1)^2+2(n-1)+1$ sau că

$2\cdot 2025^2+2\cdot 2025+1=2\cdot 2026^2-2\cdot 2026+1$.. 2p

Finalizează și obține A $=1-\frac{1}{2\cdot 2026^2+2\cdot 2026+1}$, deci A<1, dar A>0, și $[A]$=0 .... 2p

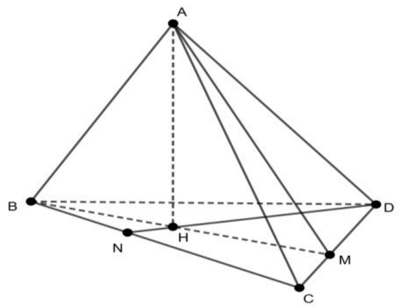
Oficiu………………………………………………………………………………………….. 1p

S III . **3.** Fie ABCD un tetraedru cu m$(\sphericalangle BAC)=m(\sphericalangle CAD)=(\sphericalangle DAB)=90°$.

a) Arătați că proiecția punctului A pe planul (BCD) este ortocentrul triunghiului BCD.

b) Dacă distanța de la A la planul (BCD) este mai mare sau egală cu 1, arătați că

AB·AC·AD ≥AB +AC +AD.



Soluție:

a) BA ⊥ AC și BA ⊥ AD ⇒ BA ⊥ (ACD) ⇒ BA ⊥ CD ①

H=pr$_{(BCD)}$A ⇒ AH⊥(BCD) ⇒AH⊥CD ②. *Din* ① și ② ⇒CD⊥(ABH)⇒CD⊥BH ⇒ BM înălțime în triunghiul BCD, unde {M}=BH⋂CD Analog, BC⊥DH⇒ DN înălțime în triunghiul BCD, deci H este ortocentrul triunghiului BCD.. 2p

b) ΔBAM dreptunghic în A și AH⊥BM ⇒

$$AH=\frac{AB\cdot AM}{BM}\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{BM^2}{AB^2\cdot AM^2}=\frac{AB^2+AM^2}{AB^2\cdot AM^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AB^2} \quad ③$$

Dar, AM ⊥CD și (prin același raționament)⇒ $\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$ ④

Din ③ și ④⇒ $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}$ 2p

Cum AH ≥1 ⇒ $\frac{1}{AH^2}\le 1\Rightarrow \frac{AB^2\cdot AD^2+AB^2\cdot AC^2+AD^2\cdot AC^2}{AB^2\cdot AC^2\cdot AD^2}\le 1\Rightarrow$

$AB^2\cdot AC^2\cdot AD^2\ge AB^2\cdot AD^2+AB^2\cdot AC^2+AD^2\cdot AC^2$ ⑤ 1p

Folosind inegalitatea $x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz$, oricare ar fi x, y, z ∈ℝ, obținem

$$AB^2\cdot AD^2+AB^2\cdot AC^2+AD^2\cdot AC^2\ge AB^2\cdot AD\cdot AC+AC^2\cdot AB\cdot AD+AD^2\cdot AB\cdot AC$$

Finalizare 1p

Oficiu………………………………………………………………………………………… 1p

Problema Suplimentară :

Vârfurile unui cub se colorează în roșu, galben sau albastru. Putem proceda astfel încât fiecare mulțime formată din patru vârfuri coplanare să conțină toate cele trei culori?

<u>Soluție</u>

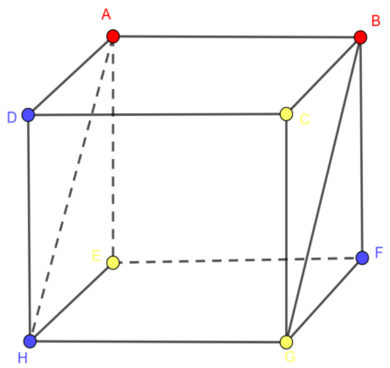
Fiind 4 puncte coplanare care trebuie colorate și având doar trei culori, două dintre puncte vor fi colorate cu aceeași culoare. Punctele colorate la fel pot fi extremități ale unei muchii a cubului (cazul I), sau extremități ale unei diagonale a unei fețe (cazul II).

Cazul I. Dacă extremitățile unei muchii sunt colorate cu aceeași culoare, atunci în mod necesar extremitățile muchiilor cubului paralele cu aceasta trebuie colorate cu celelalte două culori. În acest caz, găsim o față a cubului cu cele patru vârfuri colorate doar cu două culori.

Cazul II. Dacă extremitățile unei diagonale a unei fețe sunt colorate cu aceeași culoare, iar celelalte două vârfuri ale feței care conțin această diagonală cu celelalte două culori, atunci diagonala feței opuse, paralelă cu aceasta, va fi în mod necesar colorată cu celelalte două culori, iar celelalte două vârfuri ale feței care o conține, vor trebui colorate ambele cu prima culoare (altfel ajungem în cazul I). În această situație va exista o față a cubului ale cărei vârfuri vor fi colorate doar cu două culori.

Deci, nu este posibilă o colorare ca în enunț.

I



II