



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ

„DIMITRIE POMPEIU”

9 - 11 mai 2025

EDIȚIA a XXIII – a



Barem de corectare

CLASA A VII – A

SUBIECTUL I

Aflați numerele prime p și q care verifică relația $7(p-q)^2 = 32(p+q)$.

Barem:

oficiu..... (1p)

p și q sunt mai mari decât doi (dacă unul este par și unul impar atunci membrul stâng al egalității din enunț este impar iar dacă $p = q = 2$ se obține iarăși contradicție) (1p)

$(7, 32) = 1 \Rightarrow 7 \mid p+q$ și cum $p+q$ este par $\Rightarrow p+q = 14a, a \in \mathbb{N}^*$

$(7, 32) = 1 \Rightarrow 32 \mid (p-q)^2 \Rightarrow 16 \mid (p-q)^2 \Rightarrow 4 \mid p-q \Rightarrow p-q = 4b_1 \Rightarrow$

$7 \cdot 16b_1^2 = 32(p+q) \Rightarrow 7b_1^2 = 2(p+q) \Rightarrow b_1$ număr par $p-q = 8b, b \in \mathbb{N}^*$ (1p)

$p = 7a + 4b, q = 7a - 4b$ (1p)

Înlocuind în egalitatea dată $\Rightarrow 7 \cdot 64b^2 = 32 \cdot 14a \Rightarrow a = b^2$ (1p)

$\Rightarrow p = 7a + 4b = 7b^2 + 4b = b(7b + 4)$ și cum p este prim $\Rightarrow b = 1$ (1p)

$\Rightarrow p = 11 \Rightarrow q = 3$ (1p)

SUBIECTUL II

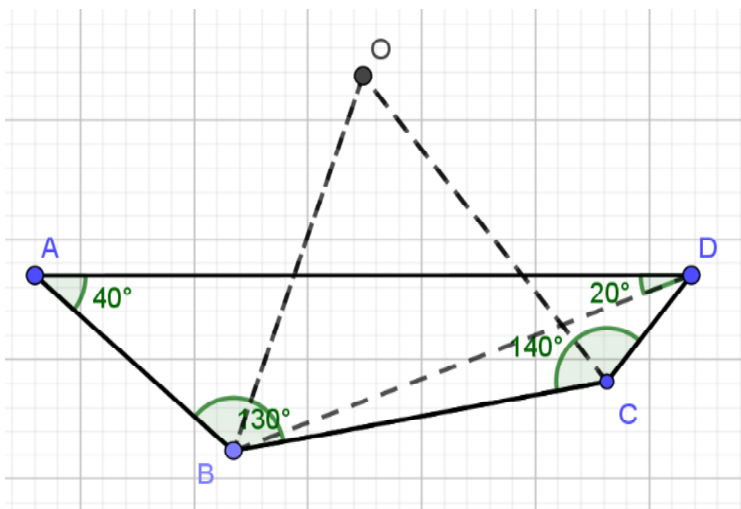
Considerăm patrulaterul convex $ABCD$ cu $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 130^\circ$, $\sphericalangle C = 140^\circ$, $\sphericalangle ADB = 20^\circ$ și $BC = \sqrt{3}$. Calculați AD .

Barem:

oficiu..... (1p)

$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ \Rightarrow ABCD$ este patrulater inscriptibil în $C(O, r)$ (1p)

$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ADB = 40^\circ$ (1p)



în $\triangle OAB$ isoscel $\angle ABO = 70^\circ$ (1p)

$\angle OBC = 60^\circ \Rightarrow \triangle OBC$ echilateral $\Rightarrow r = \sqrt{3}$ (1p)

$\angle OCD = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle COD = 20^\circ \Rightarrow \angle AOD = 120^\circ$ (1p)

în $\triangle AOD$ isoscel se obține $AD = r\sqrt{3} = 3$ (1p)

SUBIECTUL III

Prin vârful A al triunghiului ABC ducem o dreaptă oarecare d care nu taie segmentul BC . Paralelele prin punctele B și C la dreptele AC , respectiv AB , intersectează dreapta d în punctele D , respectiv E . Demonstrați că:

a) $AB \cdot AC = BD \cdot CE$;

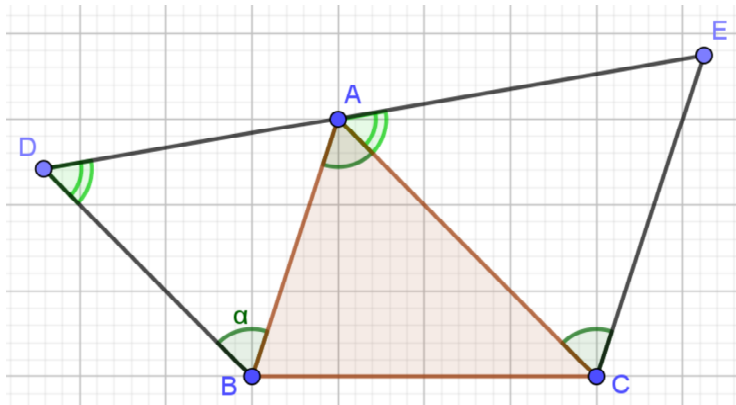
b) $\mathcal{A}_{BCED} \geq 3 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$ și precizați cazul în care are loc egalitatea.

Barem:

oficiu..... (1p)

a) $\angle ABD = \angle BAC = \angle ACE = \alpha$ (alterne interne) și $\angle ADB = \angle EAC$ (corespondente)..... (1p)

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle EAC \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{AB}{EC} \Rightarrow AB \cdot AC = BD \cdot CE$ (1p)



b) $\mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACE} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{AC \cdot CE \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{(AB \cdot BD + AC \cdot CE) \cdot \sin \alpha}{2}$ (1p)

din inegalitatea mediilor $\Rightarrow \frac{AB \cdot BD + AC \cdot CE}{2} \geq \sqrt{AB \cdot BD \cdot AC \cdot CE}$ (1p)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACE} &\geq \sqrt{AB \cdot BD \cdot AC \cdot CE} \cdot \sin \alpha = AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} \\ \Rightarrow \mathcal{A}_{BCED} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{ACE} + \mathcal{A}_{ABC} &\geq 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{ABC} \dots\dots\dots (1p) \\ \text{Egalitate are loc dac} \acute{a} \text{ \textbf{și} numai dac} \acute{a} \text{ } AB \cdot BD = AC \cdot CE &\Leftrightarrow AB \cdot AC \cdot BD^2 = AC^2 \cdot BD \cdot CE \Leftrightarrow \\ BD^2 = AC^2 &\Leftrightarrow BD = AC \Leftrightarrow ACBD \text{ paralelogram} \Leftrightarrow d \parallel BC \dots\dots\dots (1p) \end{aligned}$$

Problema suplimentară

Să se demonstreze că un număr natural $x \geq 2$ se poate scrie ca sumă de două sau mai multe numere naturale consecutive dacă și numai dacă x nu este putere cu exponent natural a lui 2.

Rezolvare:

” $\Rightarrow$ ” Presupunem prin absurd că numărul natural x se poate scrie ca sumă de k numere consecutive și este și putere a lui 2 $\Rightarrow x = a + (a+1) + (a+2) + \dots + (a+k-1) = 2^n$ unde $a \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ (sunt măcar două numere consecutive) și $n \in \mathbb{N}^*$ ($x \geq 2$ deci $n > 0$).

$$\text{Deducem: } ka + \frac{(k-1)k}{2} = 2^n \Rightarrow 2ka + k(k-1) = 2^{n+1} \Rightarrow k(2a+k-1) = 2^{n+1} \text{ și cum}$$

$$\begin{aligned} k \geq 2 &\Rightarrow (\exists) s \in \mathbb{N}^* \text{ cu } s \leq n+1 \text{ astfel încât } k = 2^s \Rightarrow k \text{ par} \Rightarrow 2a+k-1 \text{ impar} \\ &\Rightarrow 2a+k-1 = 1 \Rightarrow 2a+k = 2 \Rightarrow k = 2 \text{ și } a = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ contradicție.} \end{aligned}$$

” $\Leftarrow$ ” Să arătăm că dacă x nu este putere a lui 2, atunci x se poate scrie ca sumă de numere consecutive.

Putem scrie $x = 2^n (2p+1)$ unde $n \in \mathbb{N}$ (este exponentul la care apare 2 în descompunerea în factori primi a lui x) iar $p \in \mathbb{N}^*$ (p este nenul deoarece x nu este putere a lui 2).

Dacă $2^n \geq p$, atunci $(2^n - p) \in \mathbb{N}$ și x se scrie ca suma a $2p+1$ numere naturale consecutive:

$$(2^n - p) + (2^n - p + 1) + \dots + 2^n + \dots + (2^n + p - 1) + (2^n + p) = (2p+1) \cdot 2^n = x.$$

Dacă $2^n < p$, atunci în egalitatea de mai sus cel puțin primul număr este întreg negativ.

Se renunță la termenii negativi cu care începe suma, la termenii opuși și la 0 (pentru că suma acestora oricum este nulă) și rămâne o scriere a lui x în sumă de numere consecutive:

$$(p - 2^n + 1) + (p - 2^n + 2) + \dots + p + \dots + (p + 2^n - 2) + (p + 2^n - 1) + (p + 2^n) = x$$