



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



**Clasa a VI-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

NOTĂ:

- Fiecare corector acordă pe fiecare subiect un număr întreg de puncte.
- Diferența dintre punctajele acordate poate fi de maxim un punct.
- Punctajul final este media punctajelor acordate de cei doi corectori.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

SUBIECTUL I

7 PUNCTE

Oficiu

1 p

a) Determinați numerele prime a, b, c știind că: $\frac{2b+2c+2}{30-2c-a} = \frac{2a+b}{b+c-1} = \frac{c+27}{3a+2b+4c}$.

$$\frac{2b+2c+2}{30-2c-a} = \frac{2a+b}{b+c-1} = \frac{c+27}{3a+2b+4c} = \frac{2a+3b+3c+29}{2a+3b+3c+29} = 1$$

1 p

$$\frac{2b+2c+2}{30-2c-a} = 1 \rightarrow a+2b+4c = 28 \rightarrow 2/a$$

0,5 p

Dar a număr prim, așadar $a = 2$

0,5 p

$$\frac{2a+b}{b+c-1} = 1 \rightarrow 4+b = b+c-1 \rightarrow c = 5$$

0,5 p

$$\frac{c+27}{3a+2b+4c} = 1 \rightarrow 32 = 6+2b+20 \rightarrow b = 3$$

0,5 p

Prin urmare, $a = 2, b = 3$ și $c = 5$

b) Arătați că $xy - 2x - 2y + 4 = (x-2) \cdot (y-2)$, apoi rezolvați ecuația $xy - 1 = 2(x+y)$, pentru orice numere $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$xy - 2x - 2y + 4 = x(y-2) - 2(y-2) = (x-2) \cdot (y-2)$$

1 p

$$xy - 1 = 2(x+y) \rightarrow xy - 1 - 2x - 2y = 0$$

0,5 p

$$xy - 1 - 2x - 2y = 0 \quad / +5 \rightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 5$$

0,5 p

$$\rightarrow (x-2) \cdot (y-2) = 5$$

0,5 p

$$\text{Obține soluțiile: } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}; \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

0,5 p

SUBIECTUL II

7 PUNCTE

Să se determine $k \in \mathbb{N}^*, k \leq 1000$ pentru care există numerele naturale nenule a, b, c cu $a < b < c$ astfel încât $a \cdot b \cdot c = k^2$ și $a + b + 2c$ este un multiplu comun pentru b și c .

Oficiu

1 p

Fie numerele naturale nenule a, b, c cu $a < b < c$ care satisfac condiția din enunț.

Cum $a + b + 2c$ este un multiplu comun pentru b și $c \rightarrow \frac{c}{a+b+2c} \rightarrow c / a+b$ deci $a + b$ este un multiplu al numărului c , așadar $a + b \in \{c; 2c; 3c \dots\}$

0,5 p

Deoarece $a + b < c + c = 2c \rightarrow a + b = c$

Cum $a + b + 2c$ este un multiplu comun pentru b și $c \rightarrow b / a + b + 2c \rightarrow b / a + b + 2(a + b) \rightarrow \frac{b}{3a+3b} \rightarrow b / 3a$ adică $3a \in \{b; 2b; 3b; \dots\}$

1 p

Dar $3a < 3b \rightarrow 3a \in \{b; 2b\}$

0,5 p



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



Cazul I: $3a = b$

În acest caz avem: $\begin{cases} a = n, & n \in \mathbb{N}^* \\ b = 3n \\ c = 4n \end{cases}$ Apoi $a \cdot b \cdot c = 12n^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot n^3$

1 p

Căutăm valori mici ale lui n astfel încât $2^2 \cdot 3 \cdot n^3 = k^2, k \leq 1000$. Singurele valori posibile sunt $n = 3 \rightarrow abc = 18^2, n = 3 \cdot 2^2 \rightarrow abc = 144^2$ și $n = 27 \rightarrow abc = 486^2$.

0,5 p

Cazul II: $3a = 2b$

În acest caz, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^3 = k^2, k \leq 1000$.

1 p

Singura valoare posibilă este $p = 30 \rightarrow abc = 900^2$

Soluția $S = \{18; 144; 486; 900\}$

0,5 p

SUBIECTUL III

7 PUNCTE

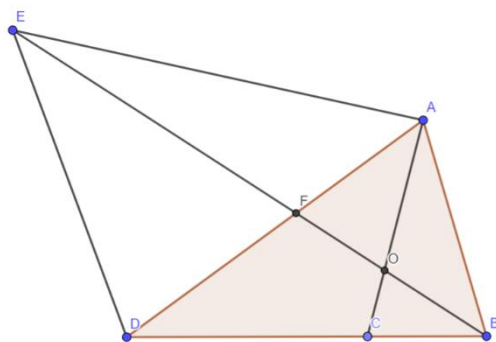
Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $\sphericalangle ABC = 72^\circ$. Pe dreapta BC considerăm un punct D astfel încât C este situat între D și B , iar $CD = AB$. Fie E un punct situat în același semiplan cu A față de BD , astfel încât $DE \parallel AB$ și $DE = DB$. Notăm cu F punctul de intersecție a dreptelor AD și BE .

a) Arătați că AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$.

b) Demonstrați că dreptele AC și AE sunt perpendiculare și $AF = FC = BC$.

Oficiu

1 p



a) ΔABC isoscel $\rightarrow \sphericalangle BAC = 36^\circ$ (1)
 $\left. \begin{array}{l} CD = AB \\ AB = AC \end{array} \right\} \rightarrow AC = DC$

$\rightarrow \Delta ACD$ isoscel

1 p

$\sphericalangle ACD$ exterior $\rightarrow \sphericalangle ACD = 108^\circ \rightarrow \sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = 36^\circ$ (2)

Din (1) și (2) $\rightarrow AC$ bisectoarea $\sphericalangle BAD$.

1 p

b) $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA \rightarrow \Delta ABD$ isoscel $\rightarrow \left. \begin{array}{l} BD = AD \\ DE = DB \end{array} \right\} \rightarrow \Delta ADE$ isoscel, AE bază
 $DE \parallel AB, AD - \text{secantă} \rightarrow \sphericalangle ADE = \sphericalangle DAB = 72^\circ$ (alt. int)

1 p

Deci $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA = 54^\circ \rightarrow \sphericalangle EAC = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAC = 90^\circ \rightarrow AE \perp AC$

$DE = DB \rightarrow \Delta DEB$ isoscel $\rightarrow \sphericalangle DBE = \sphericalangle DEB = 36^\circ$

1 p

$\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABD - \sphericalangle DBE = 36^\circ$

$\Delta ABC \equiv \Delta BAF$ (U.L.U.) $\rightarrow AF = BC$ (3)

ΔAOB isoscel ($\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 36^\circ$) $\rightarrow \sphericalangle AOB = 108^\circ \rightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle FOC$
 $= 108^\circ$ (op la vârf)

1 p

$\left. \begin{array}{l} OC = AC - AO \\ OF = BF - BO \end{array} \right\} \rightarrow OC = OF \rightarrow \Delta FOC$ isoscel $\rightarrow \sphericalangle OCF = 36^\circ$, dar

$\sphericalangle CAF = 36^\circ \rightarrow \Delta CAF$ isoscel $\rightarrow AF = FC$ (4)

1 p

Din (3) și (4) $\rightarrow AF = BC = FC$

PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Un ceas arată ora 9 și 40 minute. Să se afle măsura unghiului format de minutar și orar.

Soluție:

Într-o oră minutarul parcurge 360° , iar într-un minut $360^\circ : 60 = 6^\circ$ și în 40 minute $40 \cdot 6^\circ = 240^\circ$.



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIII – a
Botoșani, 10.05.2025**



Acul orar în 12 ore parcurge 360^0 , într-o oră $360^0:12 = 30^0$ și într-un minut $\left(\frac{30}{60}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 30'$.

În 9 ore și 40 de minute acul orar parcurge $9 \cdot 30^0 + 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 270^0 + 20^0 = 290^0$

La ora 9 și 40 minute unghiul dintre ace este $290^0 - 240^0 = 50^0$