CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
ediția a XXIV – a
Botoșani, 08.05.2026

Clasa a VI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

NOTĂ:

- Fiecare corector acordă pe fiecare subiect un număr întreg de puncte.
- Diferența dintre punctajele acordate poate fi de maxim un punct.
- Punctajul final este media punctajelor acordate de cei doi corectori.
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Subiectul I (7 puncte)

Oficiu 1p

a) Pentru $a, b \in N$, avem $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$. Verificați această proprietate pentru $a = 46$ și $b = 207$.

Soluție

$46 = 2 \cdot 23$, iar $207 = 3^2 \cdot 23$...0,5p

$(46{,}207) = 23$...0,5p

$[46{,}207] = 414$...0,5p

Verifică proprietatea: $23 \cdot 414 = 46 \cdot 207 \rightarrow 9522 = 9522 \rightarrow (a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$........0,5p

b) Determinați numerele naturale nenule a și b, cu $a < b$, pentru care $(a, b) + [a, b] = 437$.

Soluție

$(a, b) = d \rightarrow a = d \cdot x; b = d \cdot y$, unde $(x; y) = 1$, dar $a < b \rightarrow x < y$............................0,5p

$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b \rightarrow [a; b] = x \cdot y \cdot d$.. 0,5p

$(a, b) + [a, b] = 437 \rightarrow d \cdot (1 + xy) = 437 \rightarrow 1 + xy = \frac{437}{d}$..0,5p

dar $x, y \in N \rightarrow \frac{437}{d} \in N \rightarrow d \in \{1; 19; 23; 437\}$..0,5p

Pentru $d = 1 \rightarrow a = 1,\ b = 436$ și $a = 4, b = 109$.. 0,5p

Pentru $d = 19 \rightarrow a = 19,\ b = 418$ și $a = 38, b = 209$.. 0,5p

Pentru $d = 23 \rightarrow a = 23,\ b = 414$ și $a = 46, b = 207$.. 0,5p

Pentru $d = 437 \rightarrow xy = 0$, fals, pentru că $a, b \in N^*$...0,5p

Subiectul II (7 puncte)

Fie numerele naturale nenule x, y și z cu proprietatea că x, y și $x + y + z$ sunt direct proporționale cu $a + 1, a + 2$ și $3 \cdot (a + 1), a \in N^*$. Arătați că $3 < \left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{x+y}{y+z} \leq 11{,}5$.

Soluție

Oficiu 1p

$\{x;\ y;\ x + y + z\}$ direct proporționale cu $\{a + 1;\ a + 2;\ 3(a + 1)\} \rightarrow \frac{x}{a+1} = \frac{y}{a+2} = \frac{x+y+z}{3(a+1)} = k$........1p

$x = ka + k, y = ka + 2k$..1p

$x + y + z = 3ak + 3k \rightarrow z = ka$...1p

Avem: $\frac{x}{z} = \frac{ka+k}{ka} = 1 + \frac{1}{a}, \frac{y}{x} = \frac{ka+2k}{ka+k} = \frac{a+2}{a+1} = 1 + \frac{1}{a+1}$...1p

$\frac{x+y}{y+z} = \frac{2ka+3k}{2ka+2k} = \frac{2a+3}{2a+2} = 1 + \frac{1}{2a+2}$...1p

Dar $\frac{x}{z} = \frac{ka+k}{ka} = 1 + \frac{1}{a} \rightarrow 1 < \frac{x}{z} \le 1 + 1 = 2$

Analog $1 < \frac{y}{x} \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ și $1 < \frac{x+y}{y+z} \le 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$...1p

Prin adunare obținem: $3 < \left(\frac{x}{z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{x+y}{y+z} \le 11{,}5$...1p

Subiectul III (7 puncte)

În exteriorul triunghiului oarecare ABC se construiesc triunghiurile ACP și ABR, astfel încât $CP = BR$ și $BP = CR$. Dacă $CP \cap BR = \{S\}$, demonstrați că:

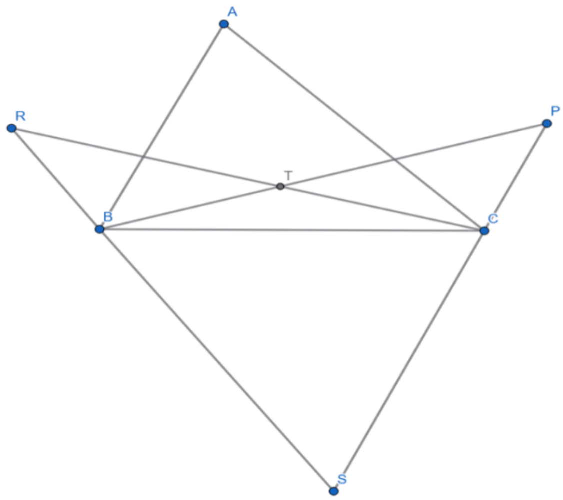
a) $CB \| PR$

b) $ST \perp PR$, unde $BP \cap CR = \{T\}$.

Soluție

Oficiu

.... ***1p***



a) $\Delta RCB \equiv \Delta PCB\ (LLL) \rightarrow \sphericalangle PBC = \sphericalangle RCB = a^0$

$\Delta RBP \equiv \Delta PCR (LLL) \rightarrow \sphericalangle CRP = \sphericalangle BPR = b^0$..1p

În $\Delta RTP \rightarrow \sphericalangle RTP = 180^0 - 2b^0$

În $\Delta BTC \rightarrow \sphericalangle BTC = 180^0 - 2a^0$..1p

Dar $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle RTP$ (opuse la vârf), așadar $a = b \rightarrow \sphericalangle PBC = \sphericalangle BPR$ (alterne interne), deci $CB \| PR$...1p

b) Din a)$\rightarrow \Delta BRP \equiv \Delta CPR \rightarrow \sphericalangle BRP = \sphericalangle CPR \rightarrow \Delta SPR$ isoscel de bază $PR \rightarrow SR = SP$

Dar $BR = CP \rightarrow SB = SC$...1p

$\Delta BRP \equiv CPR \rightarrow \sphericalangle RBP = \sphericalangle PCR \rightarrow \sphericalangle TBS = \sphericalangle TCS$(au suplemente egale)..........................1p

$\Delta TBS \equiv \Delta TCS (LLL) \rightarrow \sphericalangle TSB = \sphericalangle TSC \rightarrow ST$ bisectoarea $\sphericalangle PSR, \Delta SRP$ isoscel cu baza RP→ST⊥PR...1p

PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Se consideră un pătrat magic ca în figura de mai jos

a	b	c	d

Completat cu cifre nenule și diferite a, b, c, d astfel încât pe fiecare linie sau coloană cifrele să nu se repete. După completarea pătratului se consideră numerele de patru cifre citite de pe fiecare coloană, de sus în jos și de pe fiecare linie citite de la stânga la dreapta, astfel încât suma celor opt numere este egală cu 59994. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare corespunzătoare numărului $\overline{abcd}_4$.

Soluție

Pentru că pe fiecare linie și pe fiecare coloană cifrele nu se repetă, fiecare dintre cifrele nenule și diferite a, b, c, d va apărea de două ori ca cifra miilor, de două ori ca cifra sutelor, de două ori ca cifra zecilor și de două ori ca cifra unităților (o dată pentru numerele citite de pe fiecare linie și o dată pentru numerele citite de pe fiecare coloană).

Un exemplu de completare este:

a	b	c	d
d	a	b	c
c	d	a	b
b	c	d	a

Suma celor opt numere este: $2 \cdot 1000 \cdot (a+b+c+d) + 2 \cdot 100 \cdot (a+b+c+d) + 2 \cdot 10 \cdot (a+b+c+d) + 2 \cdot (a+b+c+d) = 2 \cdot 1111 \cdot (a+b+c+d)$.

Se obține astfel $2 \cdot 1111 \cdot (a+b+c+d) = 59994 \rightarrow a+b+c+d = 27$

Astfel obținem că cea mai mică valoare a numărului $\overline{abcd} = 3789 \rightarrow \overline{abcd}_4 = 323031_4$

Cea mai mare valoare a numărului $\overline{abcd} = 9873 \rightarrow \overline{abcd}_4 = 2122101_4$