



D. Pompeiu

Concursul interjudețean de matematică

Dimitrie Pompeiu

10 mai 2025



1. Considerăm $\triangle ABC$ și P un punct în plan. Știind că putem forma un triunghi obtuzunghic cu segmentele $[PA], [PB], [PC]$ și că $[PA]$ este cel mai mare dintre aceste segmente, demonstrați că unghiul $\widehat{BAC}$ este ascuțit.

Barem.

$$|\vec{AP}|^2 > |\vec{BP}|^2 + |\vec{CP}|^2 \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$|\vec{AP}|^2 > |\vec{AP} - \vec{AB}|^2 + |\vec{AP} - \vec{AC}|^2 = 2|\vec{AP}|^2 + |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AP} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AP} \cdot \vec{AC} \Rightarrow$$

$$0 > |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AP} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AP} \cdot \vec{AC} \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$2\vec{AB} \cdot \vec{AC} > |\vec{AP}|^2 + |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AP} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AP} \cdot \vec{AC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \Rightarrow$$

$$2\vec{AB} \cdot \vec{AC} > |\vec{AP} - \vec{AB} - \vec{AC}|^2 \Rightarrow \dots\dots\dots 4p$$

$$m\widehat{BAC} < 90^\circ. \dots\dots\dots 1p$$

2. Considerăm numerele strict pozitive a, b, c, d astfel încât

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \leq \frac{81}{4}.$$

Demonstrați că $a \leq 4d$.

Barem.

$$\frac{81}{4} \geq (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = ((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{d})^2) \left(\left(\sqrt{\frac{1}{d}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 \right) \Rightarrow (CBS)$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{a}{d}} + 1 + 1 + \sqrt{\frac{d}{a}}\right)^2. \dots\dots\dots 3p$$

Notăm $x = \sqrt{\frac{a}{d}}$. Obținem:

$$\frac{9}{2} \geq x + 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \geq 2x^2 - 5x + 2 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Rightarrow a \leq 4d. \dots\dots\dots 3p$$

Egalitate în CBS și $a = 4d$ și atunci $b = c = 2d$. $\dots\dots\dots 1p$

3. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care satisfac ecuația funcțională:

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Barem.

$$x = y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(x^2) = xf(x).$$

$$xf(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = -xf(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \text{ pentru } x \neq 0. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Pentru } u, v \geq 0, \text{ alegem } y = \sqrt{u}, x = \sqrt{u+v} \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v). \dots\dots\dots 2p$$

Exprimăm $f((x+1)^2)$ în două moduri:

$$f((x+1)^2) = f(x^2) + 2f(x) + f(1).$$

$$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = xf(x) + xf(1) + f(x) + f(1).$$

Deci $f(x) = xf(1), x \geq 0$. Funcția este impară, prin urmare $f(x) = xf(1), x \in \mathbb{R}$. 3p

Verificare.....1p

Problema suplimentară. Demonstrați că există un număr care are 2025 de cifre impare și este divizibil prin 5^{2025} .

Barem.

Demonstrăm prin inducție după n :

P(n): Există cifrele impare $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât $\overline{a_1 a_2 \dots a_n} : 5^n$.

I. Verificare P(1): $5 : 5$.

II. Din P(n), există $\overline{b_1 b_2 \dots b_n} = 5^n k$. Pentru i o cifră impară considerăm numerele: $\overline{i b_1 b_2 \dots b_n} = i 10^n + 5^n k = 5^n (i 2^n + k)$. Cele 5 numere de forma $i 2^n + k$ dau resturi diferite prin împărțirea la 5. Există un i pentru care $i 2^n + k$ este divizibil prin 5. Alegem: $a_1 = i, a_2 = b_1, \dots, a_{n+1} = b_n$. Obținem P(n+1) adevărată.

Din I și II, P(n) este adevărată pentru orice n . Atunci P(2025) adevărată.