CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
17 - 19 mai 2024
EDIŢIA a XXII - a

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră $X \in \mathcal{M}_{2024}(\mathbb{R})$ astfel încât $X^5 + X^3 + I_{2024} = O_{2024}$. Arătaţi că $\det(X) > 0$.

Problema 2. Fie $f, g : [0,1] \to [0,1]$ două funcţii surjective astfel încât f este crescătoare, iar g este descrescătoare. Demonstraţi că mulţimea $\{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\}$ este un interval închis.

O mulţime cu un singur element este considerată interval închis degenerat, adică pentru $a \in \mathbb{R}$ avem $\{a\} = [a,a]$.

Problema 3. Determinaţi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ cu proprietatea că, pentru orice matrice nenule $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care verifică $AB^* + BA^* = O_n$, avem $|\det A| = |\det B|$.

Matricea X^* reprezintă adjuncta matricei X.

Problema 4 (suplimentară).

Se consideră funcţia bijectivă $f : \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$, pentru orice $n \geq 1$, unde f^{-1} este inversa funcţiei f. Arătaţi că $\lim\limits_{n \to \infty} 3^n \cdot x_n = \frac{3\pi}{4}$.

Gazeta Matematică

Notă. Timpul de lucru este de 3 ore.
Fiecare dintre primele trei probleme se notează de la 0 la 7 puncte.