**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ**
**„DIMITRIE POMPEIU”**
**17 - 19 mai 2024**
**EDIŢIA a XXII - a**

## BAREM - Clasa a XI-a

**Problema 1.** Se consideră $X \in \mathcal{M}_{2024}(\mathbb{R})$ astfel încât $X^5 + X^3 + I_{2024} = O_{2024}$. Arătaţi că $\det(X) > 0$.

*Mihai Piticari*, Câmpulung Moldovenesc şi *Sorin Rădulescu*, Bucureşti

**Soluţie.** Egalitatea din enunţ se poate scrie sub forma $X^3(X^2 + I_{2024}) = -I_{2024}$, de unde, trecând la determinanţi, rezultă $\left(\det(X)\right)^3 \cdot \det(X^2 + I_{2024}) = 1$, (1).

........................................................................................................ **3p**

Trecând la determinanţi în egalitatea $X^2 + I_{2024} = (X + \mathrm{i}I_{2024})(X - \mathrm{i}I_{2024})$ şi ţinând cont că $X \in \mathcal{M}_{2024}(\mathbb{R})$, avem succesiv:

$\det\left(X^2 + I_{2024}\right) = \det\left(X + \mathrm{i}I_{2024}\right) \cdot \overline{\left(X + \mathrm{i}I_{2024}\right)} = \left|\det\left(X + \mathrm{i}I_{2024}\right)\right|^2 \geq 0$, (2).

........................................................................................................ **3p**

Din (1) şi (2) deducem imediat că $\det(X) > 0$.

........................................................................................................ **1p**

**Problema 2.** Fie $f, g : [0,1] \to [0,1]$ două funcţii surjective astfel încât $f$ este crescătoare, iar $g$ este descrescătoare. Demonstraţi că mulţimea $\{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\}$ este un interval închis.

*O mulţime cu un singur element este considerată interval închis degenerat, adică pentru $a \in \mathbb{R}$ avem $\{a\} = [a,a]$.*

*Mihai Piticari*, Câmpulung Moldovenesc

**Soluţie.** Deoarece $f$ şi $g$ sunt funcţii surjective deducem că $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g) = [0,1]$. Cum $f$ este crescătoare, rezultă $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$ Cum $g$ este descrescătoare, rezultă $g(0) = 1$ şi $g(1) = 0$.

........................................................................................................ **1p**

Deoarece funcţia $f$ este monotonă şi are imaginea un interval, deducem că $f$ este funcţie continuă. În mod similar justificăm că funcţia $g$ este continuă.

........................................................................................................ **1p**

Considerăm funcţia $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$ şi mulţimea $M$, unde $M = \{x \in [0,1] \mid h(x) = 0\}$. Evident avem $\{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\} = M$.

Funcţia $h$ este crescătoare şi continuă. Cum $h(0) = -1 < 0$ şi $h(1) = 1 > 0$, rezultă că există $c \in (0,1)$ astfel încât $h(c) = 0$, adică $c \in M$, deci $M \neq \emptyset$.

........................................................................................................ **2p**

Dacă $M$ are un singur element, atunci $M = \{c\} = [c,c]$. Dacă $M$ are mai multe elemente, notăm $a = \inf M$ şi $b = \sup M$. Evident $0 \leq a < b \leq 1$ şi cum $f$ este continuă, avem $a, b \in M$, adică $h(a) = h(b) = 0$.

Demonstrăm că $M = [a,b]$. Într-adevăr, pentru orice $x \in (a,b)$ avem $a < x < b$ şi cum $h$ este crescătoare rezultă $0 = h(a) \leq h(x) \leq h(b) = 0$. Obţinem $h(x) = 0$, deci $x \in M$. Aşadar $(a,b) \subset M$, deci $M = [a,b]$.

........................................................................................................ **3p**

**Problema 3.** Determinaţi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ cu proprietatea că, pentru orice matrice nenule $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care verifică $AB^* + BA^* = O_n$, avem $|\det A| = |\det B|$.

*Matricea $X^*$ reprezintă adjuncta matricei $X$.*

*Cristi Săvescu*, Focşani

**Soluţie.** Pentru $n = 2$, fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = I_2$. Avem $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^* = I_2$, deci $AB^* + BA^* = O_2$. Dar $\det A = 0$ şi $\det B = 1$. Aşadar, $n = 2$ nu verifică.

........................................................................................................ **1p**

Arătăm că orice $n \geq 3$ verifică. Notăm cu $a = \det A$ şi $b = \det B$.

Presupunem că una dintre cele două matrice este singulară, să zicem $B$. Atunci avem $b = 0$ şi $BB^* = O_n$, iar $AB^*B + BA^*B = O_n$ implică $BA^*B = O_n$.

Dacă $a \neq 0$, din $AA^* = A^*A = aI_n$ obţinem $A^*$ inversabilă, iar din inegalitatea lui Sylvester avem $0 = \text{rang}(BA^*B) \geq \text{rang}(BA^*) + \text{rang}(B) - n = 2\text{rang}(B) - n$. Atunci $\text{rang}(B) \leq \frac{n}{2} < n - 1$, deci $B^* = O_n$. Rezultă $BA^* = O_n$, adică $B = O_n$, absurd. Aşadar $a = 0$. Atunci $\det A = \det B = 0$ şi concluzia se impune.

........................................................................................................ **3p**

Dacă ambele matrice sunt inversabile, înmulţim relaţia din enunţ cu $B$ la dreapta şi cu $AB^{-1}$ la stânga şi obţinem $AB^{-1}AB^*B + AA^*B = O_n$, adică $b \cdot AB^{-1}A = -a \cdot B$ sau $(AB^{-1})^2 = \frac{-a}{b} I_n$. Trecând la determinanţi deducem $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{-a}{b}\right)^n$, de unde $\left(\frac{-a}{b}\right)^{n-2} = 1$. Trecând la modul rezultă $\left(\frac{|-a|}{|b|}\right)^{n-2} = 1$, prin urmare $|a| = |b|$.

........................................................................................................ **3p**

**Problema 4 (suplimentară).**

Se consideră funcţia bijectivă $f : \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$, pentru orice $n \geq 1$, unde $f^{-1}$ este inversa funcţiei $f$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \cdot x_n = \frac{3\pi}{4}$.

*Ion Ciudin*, Botoşani, *Supliment Gazeta Matematică*, nr.2/2024

**Soluţie.** Deoarece $f(\alpha) = \beta \iff \alpha = f^{-1}(\beta)$, avem $x_n = f(x_{n+1})$, $\forall n \geq 1$, (1).

Pentru orice $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ avem $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$ şi apoi deducem formula $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$, adică $\operatorname{tg} 3a = f(\operatorname{tg} a)$, (2).

Folosind relaţia (2), avem $f(x_2) = x_1 = 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 4}\right) = f\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3 \cdot 4}\right)$ şi cum $f$ este injectivă rezultă $x_2 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3 \cdot 4}$.

Cu ajutorul relaţiei (1), se demonstrează prin inducţie că $x_n = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^{n-1} \cdot 4}, \forall n \geq 1$ şi atunci, folosind $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} \left(3^n \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^{n-1} \cdot 4}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^{n-1} \cdot 4}}{\frac{\pi}{3^{n-1} \cdot 4}} \cdot \frac{\pi}{3^{n-1} \cdot 4} \cdot 3^n\right) = \frac{3\pi}{4}.$$