



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”

17 - 19 mai 2024
EDIȚIA a XXII - a



Clasa a X-a

Problema 1. Fie $n \geq 3$ și $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ o funcție cu proprietatea că $f \circ f \circ f = f$. Notăm cu $A = \text{Im}(f)$ (imaginea funcției f).

- Arătați că $f(f(x)) = x$, pentru orice $x \in A$ și că $\{f(x) | x \in A\} = A$.
- Determinați numărul de funcții cu proprietatea dată pentru care $\text{card}(A) = 2$.

Problema 2. Fie $A \subset \mathbb{C}^*$ o mulțime cu $n \geq 3$ elemente și \mathcal{F} o familie cu cel puțin două submulțimi ale lui A , fiecare având cel puțin două elemente, cu proprietatea că, pentru orice $z, v \in A, z \neq v$, există și este unică mulțimea $S \in \mathcal{F}$ pentru care $\{z, v\} \subseteq S$.

- Arătați că \mathcal{F} conține cel mult C_n^2 submulțimi.
- Arătați că pentru orice $z \in A$ există $S, T \in \mathcal{F}, S \neq T$ pentru care $z \in S \cap T$.
- Arătați că există $S \in \mathcal{F}$ pentru care $\left| \sum_{z \in S} z \right|^2 \geq \frac{1}{C_n^2} \cdot \sum_{z \in A} |z|^2$.

Problema 3. Fie numerele reale $a > b > 1$. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația

$$a^{\log_b(x - \frac{a-b}{2})} - a = b^{\log_a(x + \frac{a-b}{2})} - b.$$

Gazeta Matematică

Problema 4. (Suplimentară) Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$xf(y) + f(x+y) \geq (y+1)f(x) + f(y), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Notă. Timpul de lucru este de 3 ore.

Fiecare dintre primele trei probleme se notează de la 0 la 7 puncte.