CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
17 - 19 mai 2024
EDIȚIA a XXII - a

BAREM - Clasa a X-a

Problema 1. Determinaţi numărul de funcţii $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că $f \circ f \circ f = f$ şi $\mathbf{card}(\mathbf{Im}(f)) = 2$, unde $n \geqslant 3$ este un număr natural dat.

Silviu Cristea

Soluţie. a) Notăm cu $A = \mathbf{Im}(f)$. Fie $x \in A$. Atunci există $y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $f(y) = x$ şi conform ipotezei, avem $f(f(f(y))) = f(y)$, adică $f(f(x)) = x$ (1) **1p**
Fie g restricţia lui f la A. Aceasta are codomeniul inclus în A, deci $g : A \to A$ **1p**
Din (1) rezultă că g este o bijecţie, deci $g(A) = A$ şi implicit, $f(A) = A$ **1p**
b) Fie $A = \{a, b\}$. Dacă $f(a) = a$, atunci $f(b) = b$, iar dacă $f(a) = b$, atunci $f(b) = a$. Deducem că $f(f(x)) = x$, pentru $x \in \{a, b\}$ **1p**
Valoarea lui $f(x)$, pentru $x \notin A$, se poate alege aleator din A, întrucât relaţia din ipoteză este echivalentă cu $f(f(y)) = y$, pentru orice $y \in A$ **1p**
Aşadar, pentru $A = \{a, b\}$, numărul funcţiilor f cu $\mathbf{Im}(f) = A$ este $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$.**1p**
Putem alege $\{a, b\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ în C_n^2 moduri. Atunci, numărul de funcţii cerut este $2^{n-1} \cdot C_n^2 = 2^{n-2} \cdot n(n-1)$...**1p**

Problema 2. Fie $A \subset \mathbb{C}^*$ o mulţime cu $n \geqslant 3$ elemente şi $\mathcal{F}$ o familie cu cel puţin două submulţimi ale lui A, fiecare având cel puţin două elemente, cu proprietatea că, pentru orice $z, v \in A, z \neq v$, există şi este unică mulţimea $S \in \mathcal{F}$ pentru care $\{z, v\} \subseteq S$.

Arătaţi că există $S \in \mathcal{F}$ pentru care $\left|\sum_{z\in S} z\right|^2 \geqslant \frac{1}{C_n^2} \cdot \sum_{z\in A} |z|^2$.

Cristi Săvescu

Soluţie. a) Fie $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Pentru fiecare $S \in \mathcal{F}$ avem $|S| \geqslant 2$, deci putem asocia mulţimii S perechea de indici minimi (i, j) astfel încât $z_i, z_j \in S$. Din condiţia din ipoteză deducem că orice două mulţimi din $\mathcal{F}$ au asociate perechi distincte, deci $|\mathcal{F}| \leqslant |\{(i, j)|1 \leqslant i < j \leqslant n\}| = C_n^2$ (1) **1p**
b) Dacă există $z \in A$ pentru care există o singură mulţime $S \in \mathcal{F}$ pentru care $z \in S$, atunci pentru orice $v \in A \setminus \{z\}$, avem $\{z, v\} \subset S$, deci $S = A$ **1p**
Alegând $T \in \mathcal{F}, T \neq S$ şi $v, w \in T$, mulţimea $\{v, w\}$ este submulţime atât pentru S cât şi pentru T, contradicţie cu ipoteza. Atunci, orice $z \in A$ apare în cel puţin două submulţimi din $\mathcal{F}$ (2) **1p**

c) Presupunem contrariul concluziei, adică $\Big|\sum_{z\in S} z\Big|^2 < \frac{1}{C_n^2}\cdot\sum_{z\in A}|z|^2$, pentru orice $S\in\mathcal{F}$. Atunci, conform (1), avem $\sum_{S\in\mathcal{F}}\Big|\sum_{z\in S} z\Big|^2 < \frac{|\mathcal{F}|}{C_n^2}\cdot\sum_{z\in A}|z|^2 \leqslant \sum_{z\in A}|z|^2$ (3) **1p**

Dar $\sum_{S\in\mathcal{F}}\big|\sum_{z\in S} z\big|^2 = \sum_{S\in\mathcal{F}}\left(\sum_{z\in S} z\cdot\sum_{z\in S}\overline{z}\right) = \sum_{S\in\mathcal{F}}\left(\sum_{z\in S}|z|^2+\sum_{\{z,v\}\subset S}(z\overline{v}+\overline{z}v)\right)$, deci (3) se rescrie $\sum_{z\in A}|z|^2 > \sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{z\in S}|z|^2+\sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{\{z,v\}\subset S}(z\overline{v}+\overline{z}v)$ **1p**

Ipoteza implică $\{\{z,v\}\subset S | S\in\mathcal{F}\} = \{\{z,v\}\subset A\}$ şi atunci deducem că are loc identitatea $\sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{\{z,v\}\subset S}(z\overline{v}+\overline{z}v) = \sum_{\{z,v\}\subset A}(z\overline{v}+\overline{z}v)$ **1p**

Atunci avem $\sum_{z\in A}|z|^2 > \sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{z\in S}|z|^2+\sum_{\{z,v\}\subset A}(z\overline{v}+\overline{z}v)$ (4). În mod similar, avem şi $\Big|\sum_{z\in A} z\Big|^2 = \sum_{z\in A}|z|^2+\sum_{\{z,v\}\subset A}(z\overline{v}+\overline{z}v)$, deci conform relaţiei (4), adunând $\sum_{z\in A}|z|^2$ în ambii membri, avem $2\cdot\sum_{z\in A}|z|^2 > \Big|\sum_{z\in A} z\Big|^2+\sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{z\in S}|z|^2 \geqslant \sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{z\in S}|z|^2$. Dar, din (2) deducem că $\sum_{S\in\mathcal{F}}\sum_{z\in S}|z|^2 \geqslant 2\cdot\sum_{z\in A}|z|^2$, contradicţie **1p**

Problema 3. Fie numerele reale $a>b>1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$a^{\log_b\left(x-\frac{a-b}{2}\right)}-a = b^{\log_a\left(x+\frac{a-b}{2}\right)}-b.$$

Mihai Opincariu, Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $t=\frac{a-b}{2}$. Observăm că $x>t$ **1p**
Ecuaţia se scrie echivalent $a^{\log_b(x-t)}-t = b^{\log_a(x+t)}+t = k$ **2p**
Atunci $\log_a(k+t)=\log_b(x-t)$ şi $\log_b(k-t)=\log_a(x+t)$, deci dacă definim funcţia $f:(t,\infty)\to\mathbb{R}$ prin $f(x)=\log_a(x+t)+\log_b(x-t)$, avem $f(k)=f(x)$. Dar f este strict crescătoare, deci injectivă, şi atunci $x=k$, adică $\log_a(x+t)=\log_b(x-t)=p$ **2p**
Atunci $a^p-b^p=2t=a-b$, iar cum $f_p(x)=x^p-x=x(x^{p-1}-1)$ este strict monotonă pe $(1,\infty)$ pentru $p\neq 1$, din $a\neq b$ avem $p=1$. Atunci $x=b+t=\frac{a+b}{2}$, care verifică **2p**

Problema 4. Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care

$$xf(y)+f(x+y)\geqslant(y+1)f(x)+f(y),\ \text{pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

Dorlir Ahmeti

Soluţie. Fie $P(x,y)$ propoziţia din ipoteză. Din $P(0,y)$ avem $f(y)\geqslant(y+1)f(0)+f(y)$, deci $f(0)(y+1)\leqslant 0$, pentru orice $y\in\mathbb{R}$, deci $f(0)=0$ (1) **2p**

Din $P(x,-x)$, folosind (1), avem $xf(-x) \geqslant (1-x)f(x)+f(-x)$, deci $(1-x)(f(x)+f(-x)) \leqslant 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (2). Din $P(-x,x)$, folosind (1), avem $-xf(x) \geqslant (1+x)f(-x)+f(x)$, deci $(1+x)(f(x)+f(-x)) \leqslant 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (3). Din (2) şi (3) avem $(1-x^2)(f(x)+f(-x))^2 \geqslant 0$, deci $f(-x)=-f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x| \geqslant 1$. (4) **2p**
Din $P(x,y)+P(y,x)$ avem $f(x+y) \geqslant f(x)+f(y)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (5) **1p**
Atunci, dacă $|x| \geqslant 1, |y| \geqslant 1$, avem $xf(y)+f(x+y) \geqslant (y+1)f(x)+f(y) = (y+1)f(x)+ +f(x+y-x) \geqslant (y+1)f(x)+f(x+y)+f(-x)$, deci $xf(y) \geqslant yf(x)$, întrucât $f(-x)=f(x)$. Atunci, pentru orice x,y cu $|x| \geqslant 1, |y| \geqslant 1$ avem $xf(y) \geqslant yf(x) \geqslant xf(y)$, deci $xf(y)=yf(x)$. Atunci $f(x)=ax$ pentru orice $x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 1$, unde $a \in \mathbb{R}$. **1p**
Fie $y \in (-1,1)$. Din (5) avem $f(100+y) \geqslant f(100)+f(y)$, deci $f(y) \leqslant (100+y)a - 100a = ay$. De asemenea, avem $f(y) = f((100+y)-100) \geqslant f(100+y)+f(-100) = a(100+y)-100a = ay$. Atunci $f=f_a(x)=ax$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, care verifică ... **1p**