BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A VIII A

SUBIECTUL I (7 puncte)

Arătați că, dacă, $x, y \in (0; +\infty)$ și $x \cdot y = 1$, atunci: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{x+y}$.

<u>Soluție:</u>

Inegalitatea se poate demonstra în mai multe moduri, de exemplu: Membrul stâng se poate scrie:$\frac{xy}{xy+x^2} + \frac{xy}{xy+y^2} = \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y} = 1$ 2p

Se obține $1 \geq \frac{2}{x+y}$, care se obține din $x + y \geq 2\sqrt{x \cdot y} = 2$ 2p

Finalizare 2p

Oficiu 1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

Se consideră numerele:$a = \frac{x}{x^2+x+1}$ și $b = \frac{x^4-x^2-1}{x^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se știe că numerele a *și* b sunt rationale. Arătați că x este număr rațional.

<u>Soluție:</u>

Numărul $\frac{1}{a} = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$ este rațional, deci $x+\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - 1 \in \mathbb{Q}$.**1p**

Înseamnă că $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 \in \mathbb{Q}$, deci $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 - 2 \in \mathbb{Q}$.**1p**

Avem $b = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2}$, deci $x^2 - \frac{1}{x^2} = b+1 \in \mathbb{Q}$ **1p**

Rezultă că $x^2 = c \in \mathbb{Q}$ **1p**

Obținem că $a = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x+c+1}$, de unde $x(1-a) = a(c+1) \in \mathbb{Q}$ **1p**

Dacă $x \notin \mathbb{Q}$, rezultă că $a = 1$, contradicție..**1p**

Oficiu .... ….1p

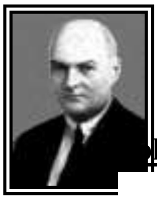
SUBIECTUL III (7 puncte)

$ABCDA'B'C'D'$ este un cub, $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'C \cap C'O = \{G\}$.

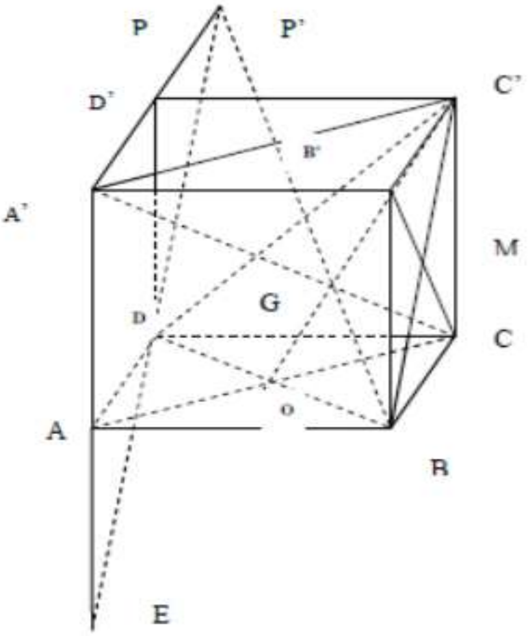
$a)$ Dacă $DG \cap (BB'C) = \{M\}$, demonstrați că M este mijlocul segmentului $[B'C]$.

b) Dacă E este simetricul punctului A' față de punctul A, demonstrați că

dreptele ED și BG sunt coplanare.



luție:



Oficiu: 1p

a) $A'C' \parallel OC \Rightarrow \Delta GOC \sim \Delta GC'A' \Rightarrow \frac{GO}{GC'} = \frac{OC}{A'C'} = \frac{1}{2}$ si cum (C'O) este mediana in Δ C'BD $\Rightarrow$ ca G este centrul de greutate al Δ C'BD (2p)

$\Rightarrow$ DG $\cap$ C'B = {M} , M mijlocul [BC'] $\Rightarrow$ M si mijlocul segmentului B'C. (1p)

b) BG $\subset$ (BC,D'A') si fie BG $\cap$ A'D' = {P}

Δ GBC $\sim \Delta$ GPA' $\Rightarrow \frac{BC}{PA'} = \frac{GC}{GA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow P$ este simetricul lui A' fata de D' (1) (2p)

ED $\subset$ (AD,A'D') si fie ED $\cap$ A'D' = {P'}

AD$\parallel$ A'P' si cum A este mijlocul [A'E] $\Rightarrow$ [AD] este linie mijlocie in ΔEA'P' $\Rightarrow$ A'P'=2AD

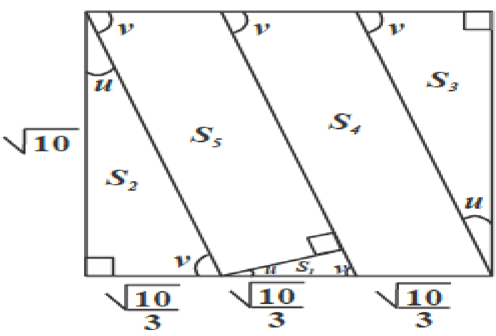
$\Rightarrow$ P' este simetricul lui A' fata de D' (2)

Din (1) si (2) $\Rightarrow$ P=P' $\Rightarrow$ PG si ED sunt concurente deci coplanare. **(1p)**

PROBLEMA SUPLIMENTARĂ

Cum poate un croitor pasionat de geometrie să taie o bucată de pânză cu dimensiunile de 1m și 10 m în 5 bucăți care rearanjate să obțină un panou publicitar în formă de pătrat fără pierdere de material. Justificați răspunsul!

Soluție:



NOTĂ Orice altă rezolvare corectă se va nota corespunzător