BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A VII A

SUBIECTUL I (7 puncte)

a) Arătați că nu există numere naturale n pentru care numărul $\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{n+2022}}$ să fie număr natural.

SOLUȚIE

Din relația dată avem că n, n+2022 și $\sqrt{n}+\sqrt{n+2022}$ trebue să fie pătrate perfecte. Adică, există numerele naturale a, b, c încât $n=a^2$, $n+2022=b^2$ și $a+b=c^2$ ………………**1 p**

Dar $b^2-a^2=2022=2\cdot 3\cdot 337$, sau $(b+a)\cdot(b-a)=2\cdot 3\cdot 337$. Cum $b+a$ este pătrat perfect, singura posibilitate este $b+a=1$ și $b-a=2022$ care nu are soluții în mulțimea numerelor naturale……………………….. …………………………………………… **1p**

b) Determinați toate perechile (x,y) de numere naturale nenule, prime între ele, cu x >y, pentru care $\sqrt{\dfrac{7y^2}{x^2-xy}}$ este număr natural.

SOLUȚIE

Avem: $\sqrt{\dfrac{7y^2}{x^2-xy}}=y\sqrt{\dfrac{7}{x(x-y)}}\in N$ rezultă că $\dfrac{7}{x(x-y)}$ este pătrat perfect…………….**1p**

Trebuie ca x(x-y) să dividă pe 7 deci x(x-y)$\in\{1,7\}$…………………………………………**1p**

Dacă x(x-y)=1- nu convine ……………………………………………………………….**1p**

Dacă x(x-y) =7 rezultă (x, x-y) poate fi (1,7) sau (7,1) iar soluția este perechea (7,6)………..1p

Oficiu ……………………………………………………………………………………1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

Fie numerele reale pozitive a, x, y care îndeplinesc simultan condițiile: $x=a-\sqrt{y}$ și $y=a+\sqrt{x}$. Știind că $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2023$ determinați numărul a.

SOLUȚIE

Din $a=x+\sqrt{y}$ și $a=y-\sqrt{x}$ avem $x+\sqrt{y}=y-\sqrt{x}$ și $y-x=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ …………….. **1p**

Sau $\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Cum $\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq 0$ urmează că $\sqrt{y}-\sqrt{x}=1$……**1p**

Din $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2023 \Longrightarrow x^2+y^2=2023xy$ sau $(x+y)^2=2025xy$ adică $x+y=45\sqrt{xy}$…..**1p**

Din relația $\sqrt{y}-\sqrt{x}=1$ prin ridicare la pătrat obținem $y+x-2\sqrt{xy}=1$, adică $43\sqrt{xy}=1$ sau $\sqrt{xy}=\frac{1}{43}$ și $x+y=45\sqrt{xy}=\frac{45}{43}$.. **1p**

Din $x=a-\sqrt{y}$ și $y=a+\sqrt{x}$ prin adunare obținem $x+y=2a+\sqrt{x}-\sqrt{y}=2a-1$......**1p**

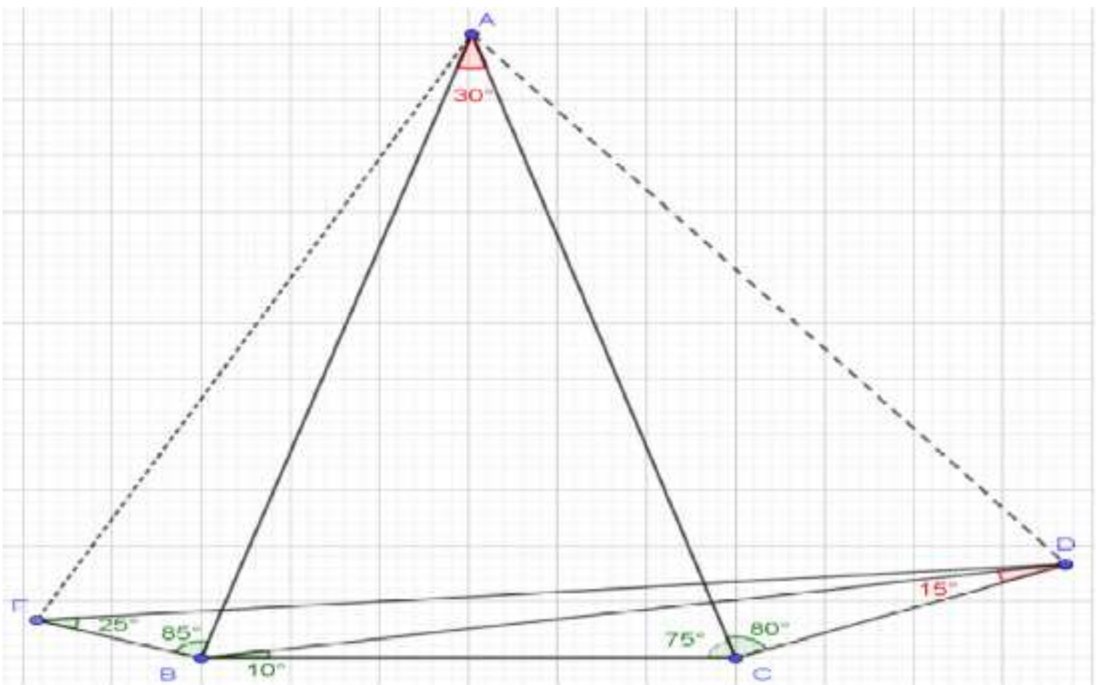
Finalizare: $a=\frac{44}{43}$ ....…......... .... **1p**

Oficiu **1p**

SUBIECTUL III (7 puncte)

Considerăm triunghiul ABC cu AB=AC și ∢A=30^0. În semiplanul determinat de dreapta AC și care nu conține punctul B se consideră punctul D astfel ca ∢ACD=80^0 și ∢CBD=10^0 iar în semiplanul determinat de dreapta AB și care nu conține punctul C se consideră punctul E astfel încât ∢EBA=85^0 și ∢BED=25^0. Demonstrați că ED=AB.

SOLUȚIE



Cum $\sphericalangle ACB=75^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCD=155^\circ$ și deci $\sphericalangle BCD+\sphericalangle BED=155^\circ+25^\circ=180^\circ \Rightarrow$ patrulaterul $BCDE$ este inscriptibil. 1p

În $\triangle DBC \Rightarrow \sphericalangle BDC=15^\circ \Rightarrow m\left(\widehat{BC}\right)=2\cdot m(\sphericalangle BDC)=30^\circ$, iar dacă O este centrul cercului circumscris patrulaterului obținem $\triangle OBC$ isoscel și $m(\sphericalangle BOC)=m\left(\widehat{BC}\right)=30^\circ \Rightarrow O=A \Rightarrow$ $AE=AD=AB=AC$ (raza cercului circumscris). 2p

Din $\triangle AEB \Rightarrow \sphericalangle EAB=180^\circ-2\cdot 85^\circ=10^\circ$ iar din $\triangle ACD \Rightarrow \sphericalangle CAD=180^\circ-2\cdot 80^\circ=20^\circ$.

Așadar, $\sphericalangle EAD=\sphericalangle EAB+\sphericalangle BAC+\sphericalangle CAD=10^\circ+30^\circ+20^\circ=60^\circ \Rightarrow \triangle AED$ este echilateral $\Rightarrow ED=AE=AB$. 3p

Oficiu **1p**

Problema suplimentară

În parcul „Florilor“ din orașul „Laleaua Neagră“ sunt 17 stejari seculari poziționați astfel încât oricare trei dintre ei sunt situați pe aceeași linie dreaptă. Între oricare doi stejari există câte o alee dreaptă pe marginea căreia s-au plantat trandafiri de aceeași culoare. Știind că s-au plantat trandafiri de trei culori: albi, galbeni și roșii, să se arate că există cel puțin 3 stejari astfel încât trandafirii plantați pe cele 3 alei dintre aceștia să aibă aceeași culoare.

SOLUȚIE

Considerăm un stejar S și aleele care-l unesc cu ceilalți 16 stejari. Conform principiului cutiei există 6 din aceste alei care conțin trandafiri de aceeași culoare, de exemplu, roșii. Notăm aceste alei cu SS_1, SS_2, SS_3, SS_4, SS_5, SS_6. Considerăm aleele S_1S_2, S_1S_3, S_1S_4, S_1S_5, S_1S_6. Dacă cel puțin una dintre aceste 5 alei conțin trandafiri roșii problema este rezolvată. Dacă cele 5 alei conțin numai trandafiri galbeni și albi, atunci conform principiului cutiei, cel puțin 3 din ele vor avea trandafiri de aceeași culoare și problema este finalizată.