CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”

CLASA a VI-a
Barem orientativ de corectare și notare

SUBIECTUL I

Fie a, b, c, d, e cinci numere întregi astfel încât primele trei sunt direct proporționale cu 2, 3, 4 iar ultimele trei sunt invers proporționale cu 7, 12, 6.

a) Arătați că $a + d$ este multiplu de 13.
b) Aflați cele cinci numere știind că suma pătratelor lor este 2024.

Din oficiu 1p

(a, b, c) d.p. $(2, 3, 4) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ și (c, d, e) i.p. $(7, 12, 6) \Leftrightarrow c \cdot 7 = d \cdot 12 = e \cdot 6$ 1p

$c = 2a$ și $7c = 12d \Rightarrow 14a = 12d \Rightarrow 7a = 6d \Rightarrow 6 \mid 7a$ și cum $(6, 7) = 1 \Rightarrow 6 \mid a$

$6 \mid a \Rightarrow a = 6k$, $k \in \mathbb{Z}$ și din $7a = 6d \Rightarrow d = 7k$, $a + d = 13k$, deci $a + d$ este multiplu de 13 .... 1p

$a = 6k$ și $d = 7k \Rightarrow b = 9k$, $c = 12k$, $e = 14k$ 1p

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2024 \Leftrightarrow 36k^2 + 81k^2 + 144k^2 + 49\,k^2 + 196\,k^2 = 2024 \Leftrightarrow k^2 = 4$ 1p

$k = 2 \Rightarrow a = 12$, $b = 18$, $c = 24$, $d = 14$, $e = 28$ 1p

$k = -2 \Rightarrow a = -12$, $b = -18$, $c = -24$, $d = -14$, $e = -28$ 1p

SUBIECTUL al II-lea

Aflați cel mai mic număr natural care are exact 16 divizori naturali, dintre care trei sunt numerele prime a, $\overline{bb}$, $\overline{ac}$, iar $a + \overline{bb} + \overline{ac}$ este pătrat perfect. *(Gazeta matematică)*

Din oficiu 1p

Numărul $\overline{bb}$ este prim și are cifre egale, deci $\overline{bb} = 11$ 1p

Notăm cu n numărul căutat. Factorii primi din descompunerea sa trebuie să fie cât mai mici.

Cel mai mic număr prim este 2, iar $\overline{ac}$ poate fi 23 sau 29 .... 1p

Pentru $a = 2$, $\overline{bb} = 11$ și $\overline{ac} = 23$, $a + \overline{bb} + \overline{ac} = 36 = 6^2$ este pătrat perfect 1p

Un număr natural care are 16 divizori naturali și care are în descompunerea sa în factori primi cel puțin trei numere prime poate fi de forma $p^3 \cdot q \cdot r$ sau $p \cdot q \cdot r \cdot s$, unde p, q, r, s sunt numere prime diferite 1p

$2^3 \cdot 11 \cdot 23 > 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$ 1p

Numărul căutat este 1518. .... 1p

SUBIECTUL al III-lea

Fie triunghiul ABC isoscel cu baza BC și P un punct oarecare pe latura BC. Notăm cu E piciorul perpendicularei din P pe AB și cu F piciorul perpendicularei din P pe AC. Simetricul punctului B față de E este S, iar simetricul punctului C față de F este T. Demonstrați $BT \equiv CS$.

Din oficiu 1p

Figura corectă 1p

PE este mediatoarea segmentului SB, deci $PB \equiv PS$, PF este mediatoarea segmentului TC, deci $PC \equiv PT$ 1p

Unghiul SPC este unghi exterior triunghiului isoscel PBS, cu baza SB, deci $\measuredangle SPC = 2 \cdot \measuredangle ABC$

Unghiul TPB este unghi exterior triunghiului isoscel PCT, cu baza TC, deci $\measuredangle TPB = 2 \cdot \measuredangle ACB$

Deoarece triunghiul ABC este isoscel cu baza BC avem $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ACB$ și deci $\measuredangle SPC \equiv \measuredangle TPB$ 2p

$\Delta SPC \equiv \Delta BPT$ (L.U.L) $\Rightarrow$ $BT \equiv CS$. 2p

Clasa a VI-a

Problema suplimentară

Se consideră cunoscut următorul rezultat: „Dacă arcele diferite $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{BC}$ ale unui cerc au măsurile de 120^o, atunci triunghiul *ABC* este echilateral”.

Un cerc este împărțit în 15 arce congruente iar punctele respective primesc ca denumire, în ordine, numerele prime până la 50.

Triunghiul (2; 13; 31) este echilateral și are „*puterea*” 2 + 13 + 31 = 46. Care dintre triunghiurile echilaterale, cu vârfurile în aceste puncte de diviziune, are „*puterea*” un număr prim?

Barem problema suplimentară

Triunghiurile echilaterale care se pot forma sunt: (2; 13; 31), (3; 17; 37), (5; 19; 41) (7; 23; 43), (11; 29; 47). Singurul triunghi echilateral care are „*puterea*” un număr prim este (7; 23; 43).