BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE – CLASA a V – a

SUBIECTUL I (7 puncte)

Se dă șirul de numere: 1,3,7,15,31,......

a) Care este al zecelea termen?
b) Al câtelea termen este 4095?
c) Dacă șirul are 200 de termeni, câți dintre ei sunt numere divizibile cu 5?

Soluție:

a)$T_1 = 2^1-1$, $T_2=2^2-1$, ... $T_{10}=2^{10}-1 = 1023$ 2p
b)$2^n - 1 = 4095$, obține: $n = 12$ 2p
c)Dacă exponentul lui 2 este multiplu de 4, atunci ultima cifra a termenului sirului este 5 .... 1p
2^4-1, 2^8-1, ...,$2^{200}-1$, sunt 50 de numere divizibile cu 5 .... 1p
Oficiu 1p

SUBIECTUL II (7 puncte)

Se dau numerele: $a = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \ldots \cdot\frac{99}{100}$ și $b = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot \ldots \cdot\frac{100}{101}$. Să se arate că:

a) $a < b$;
b) $b^2 > \frac{1}{101}$.

Soluție:

a)

$$\frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = \frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2-1}{k+2} = \frac{k+2}{k+2} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2}$$

$$k+1 < k+2 \Rightarrow \frac{1}{k+1} > \frac{1}{k+2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{k+1} < 1 - \frac{1}{k+2} \Rightarrow \frac{k}{k+1} < \frac{k+1}{k+2} \ldots\ldots\ldots 2p$$

Conform acestei egalități avem:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

....

$$\frac{99}{100} < \frac{100}{101} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$

Înmulțind aceste inegalități obținem $a < b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$

b) Înmulțind inegalitatea $a < b$ cu numărul pozitiv b obținem: $a \cdot b < b^2 \ldots\ldots\ldots 1p$

Cum $a \cdot b = \frac{1}{101} \Rightarrow b^2 > \frac{1}{101} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1p$

Oficiu 1p

SUBIECTUL III (7 puncte)

Considerăm numerele naturale:

x$= 4+4\cdot5+4\cdot5^2+4\cdot5^3+......4\cdot5^{2023}$, y$=626+x-25^{1012}$ şi z$=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot.......\cdot225-2024$.

a) Arătaţi că y este pătrat perfect.
b) Calculaţi restul împărţirii numărului z la numărul y.

Gazeta matematică

Soluție:

a) x = $4(1+5+5^2+\ldots+5^{2023}) = 5^{2024}-1$………………………………………………………….. 1p
y = $626+5^{2024}-1-5^{2024}=625=25^2$ pătrat perfect…………………………………………… 2p

b) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot225=5\cdot125\cdot a$, ……………………………………………………… 1p

z = $5\cdot125a-2024=625a+2500-2500-2024=625(a-4)+476$, $476<y$. Deci, restul împărţirii numărului z la numărul y este 476 (din teorema împărţirii cu rest)……………………………….. 2p

Oficiu 1p

PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Restul împărţirii unui număr natural prin 7; 11; 13 este egal cu restul împărţirii prin 7; 11; 13 a diferenţei dintre numărul format din ultimile trei cifre şi numărul format din restul cifrelor numărului dat.

Soluție:

I. Când numărul are cinci cifre

$\overline{abcde}=\overline{ab000}+\overline{cde}=1000\cdot\overline{ab}+\overline{cde}=\overline{ab}(1001-1)+\overline{cde}=$
$M_{11,(7),(13)}+(\overline{cde}-\overline{ab})=M_{11,(7),(13)}+k \Longrightarrow \overline{abcde}=M_{11,(7),(13)}+k.$

II. Când numărul are mai mult de şase cifre

$\overline{abcdefg}=\overline{abcd000}+\overline{efg}=\cdots=M_{11,(7),(13)}-(\overline{abcd}-\overline{efg}).$

Dacă $\overline{abcd}-\overline{efg}=M_7+k \Longrightarrow \overline{abcdefg}=M_7-(M_7+k)=M_7-k=M_7+7-k$

Analog pentru 11 şi 13. În aceste cazuri resturile sunt (7-k) la împărţirea prin 7, (11-k) la împărţirea prin 11, (13-k) la împărţirea prin 13.

<u>NOTĂ</u> Orice altă rezolvare corectă se va nota corespunzător