



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
17 - 18 mai 2024
EDIȚIA a XXII-a



CLASA a IX - a

1. O progresie aritmetică $(x_n)_{n \geq 1}$ are rația r . Se știe că șirul $([x_n])_{n \geq 1}$ este și el progresie aritmetică. Demonstrați că $r \in \mathbb{Z}$ (unde [...] este partea întreagă).

Gazeta Matematică

2. Fie intervalul $I = [1; 2]$ și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x) = x^3 - 7x + 6$.

Considerăm 20 de numere a_1, a_2, \dots, a_{20} din I cu $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{20}$ și

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{20}) = 48 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{20}^3$$

Aflați valoarea maximă a funcției f și determinați numerele a_1, a_2, \dots, a_{20} .

3. Într-un cerc $\mathcal{C}(\mathbf{O}; R)$ considerăm un diametru $[BC]$ și un punct $M \in (BO)$. Notăm $BM = a$, $MC = b$ și considerăm pe unul din semicercurile (\widehat{BC}) punctele H, G, A și P cu $MH = \frac{2ab}{a+b}$, $MG = \sqrt{a \cdot b}$, $MA = \frac{a+b}{2}$, $MP = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Arătați că GM și PO sunt perpendiculare pe BC iar $HM \parallel AO$.

Problema suplimentară

Fie o constantă reală m și ecuația: $m + \sin x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2024}$.

Arătați că ecuația are o unică soluție reală x_1 dacă și numai dacă $m = -1$.

NOTĂ: - Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare dintre primele 3 subiecte se notează de la 0 la 7 puncte