CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
17 - 18 mai 2024
EDIȚIA a XXII-a

BAREM - CLASA a IX - a

1. O progresie aritmetică $(x_n)_{n\geq 1}$ are rația $\boldsymbol{r}$. Se știe că șirul $([x_n])_{n\geq 1}$ este și el progresie aritmetică. Demonstrați că $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}$ (unde […] este partea întreagă).

Gazeta Matematică

Soluție:

Evident rația progresiei $([x_n])_{n\geq 1}$este număr întreg și o notăm cu ***p.***

Vom arăta că $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$:

Avem $x_{n+1} = x_1 + n \cdot r,\ (\forall)\, n$ *și* $[x_{n+1}] = [x_1] + n \cdot p, (\forall)\, n$ ***….2p***

Deci $[x_1 + n \cdot r] = [x_1 + n \cdot p], (\forall)\, n \implies (x_1 + n \cdot r) - (x_1 + n \cdot p) \in (-1; 1)\ (\forall)\, n$

$\implies 1 \underset{1}{>} n \cdot (r - p) \underset{2}{>} -1$ pentru $(\forall)\, n$ cu $r - p = constant.$ ***….3p***

Dacă $r - p > 0$, din 1 $\implies \frac{1}{r-p} > n, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$, absurd

Dacă $r - p < 0$, din 2 $\implies \frac{1}{p-r} > n, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$, absurd ***….2p***

Deci $r - p = 0 \implies r = p \in \mathbb{Z}$ (q.e.d.)

2. Fie intervalul $\boldsymbol{I} = [\mathbf{1}; \mathbf{2}]$ și funcția $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu ***f(x)= x³-7x+6.***

Considerăm 20 de numere $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ din $\boldsymbol{I}$ cu $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{20}$ și

$$\mathbf{2}(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{20}}) = \mathbf{48} = \boldsymbol{a_1^3} + \boldsymbol{a_2^3} + \ldots + \boldsymbol{a_{20}^3}$$

Aflați valoarea maximă a funcției $\boldsymbol{f}$ și determinați numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$.

Soluție:

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 = \underbrace{(x-1)}_{\geq 0}\underbrace{(x-2)}_{\leq 0}\underbrace{(x+3)}_{> 0} \leq 0,\ (\forall)\, x \in I \Rightarrow f(x)_{maxim} = 0 = f(1) = f(2)$$

Deci $\boldsymbol{f(x)} \leq \mathbf{0},\ (\forall)\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$ cu egalitate $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \{1;2\}$. ***….2p***

Dar, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_1}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_2}) + \ldots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_{20}}) = (\boldsymbol{a_1^3} + \boldsymbol{a_2^3} + \ldots + \boldsymbol{a_{20}^3}) - 7(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{20}}) + \mathbf{6 \cdot 20}$

$= \mathbf{48 - 6 \cdot 20 + 120 = 0}$ și cum $\boldsymbol{f(x)} \leq \mathbf{0}$, $(\forall)\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_2}) = \ldots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a_{20}}) = \mathbf{0}$

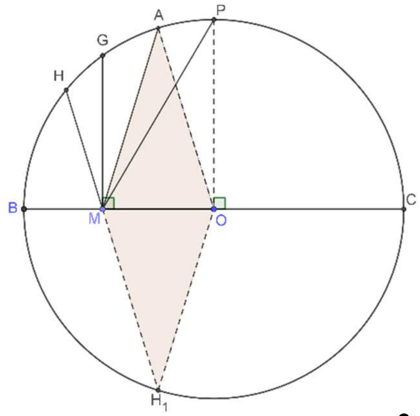
$\Rightarrow \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} = \ldots \boldsymbol{a_{20}} \in \{1;2\}$

Cum $\boldsymbol{a_1} \leq \boldsymbol{a_2} \leq \ldots \leq \boldsymbol{a_{20}}$ avem: $\begin{cases} \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} = \ldots = \boldsymbol{a_k} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a_{k+1}} = \boldsymbol{a_{k+2}} = \ldots = \boldsymbol{a_n} = \mathbf{2}. \end{cases} \Rightarrow$ ***….3p***

Suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = k \cdot 1 + (20 - k) \cdot 2 = 40 - k$

Dar $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = 24 \Rightarrow k = 16$ și $\begin{cases} a_1 = a_2 = \ldots = a_{16} = 1 \\ a_{17} = a_{18} = \ldots = a_{20} = 2 \end{cases}$ (q.e.d.) ***….2p***

3. Într-un cerc $\mathcal{C}(O; R)$ considerăm un diametru $[BC]$ și un punct $M \in (BO)$. Notăm $BM = a$, $MC = b$ și considerăm pe unul din semicercurile $\overparen{BC}$ punctele ***H, G, A*** și ***P*** cu $MH = \frac{2ab}{a+b}$, $MG = \sqrt{a \cdot b}$, $MA = \frac{a+b}{2}$, $MP = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Arătați că ***GM*** și ***PO*** sunt perpendiculare pe ***BC*** iar $HM \parallel AO$.



Soluție:

Raza $R = \frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow$

$$OM = OB - BM = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

În ΔGMO, $MG^2 + OM^2 = ab + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = R^2 = OG^2 \overset{\text{R.T.P.}}{\Longrightarrow} GM \perp BC$ ***….2p***

În ΔPMO, $OM^2 + OP^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^2+a^2}{2} = MP^2 \overset{\text{R.T.P.}}{\Longrightarrow} PO \perp BC$ ***….2p***

Prelungim $[HM\}$ până retaie cercul în $H_1 \Rightarrow MH \cdot MH_1 = BM \cdot MC \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \cdot MH_1 = a \cdot b$

$\Rightarrow MH_1 = \frac{a+b}{2} = R$. Dar $MA = \frac{a+b}{2} = R \Rightarrow$ patrulaterul $MAOH_1$ este romb deoarece toate laturile lui sunt egale cu $R \Rightarrow MH_1 \parallel AO \Rightarrow HM \parallel AO$. (q.e.d.) ***….3p***

Problema suplimentară

Fie o constantă reală m și ecuația: $m + \sin x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2024}$.

Arătați că ecuația are o unică soluție reală x_1 dacă și numai dacă $m = -1$.

Soluție:

- Pentru $m = -1$, ecuația : $\underbrace{-1 + \sin x}_{\leq 0} = \underbrace{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2024}}_{\geq 0}$ are membri de semne diferite și $x = \frac{\pi}{2}$ e unica soluție.

- Dacă x_1 e soluția unică pentru ecuația $m + \sin x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2024}$, avem și $\pi - x_1$ soluție deoarece $\sin(\pi - x_1) = \sin x_1$ și $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2024} = \left((\pi - x_1) - \frac{\pi}{2}\right)^{2024}$.

Deci $\pi - x_1 = x_1 \Rightarrow \quad m + \sin\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow m = -1$. (q.e.d.)