



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ**  
**„DIMITRIE POMPEIU”**  
 8 - 10 mai 2026  
**EDIȚIA a XXIV - a**



**BAREM - Clasa a IX-a**

**Problema 1.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$3\{x\}^2 - 4\{x\} = x - 2.$$

Am notat cu  $\{x\}$  partea fracționară a numărului  $x$ .

**Soluție** Considerăm funcția  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 4x$  care are imaginea  
 $f([0, 1)) = [-\frac{4}{3}, 0]$  ..... **2p**  
 $x - 2 \in [-\frac{4}{3}, 0] \Rightarrow x \in [\frac{2}{3}, 2] \Rightarrow [x] \in \{0, 1, 2\}$  ..... **2p**  
 Notăm  $\{x\} = \alpha$  și distingem trei cazuri  
 $[x] = 0 \Rightarrow x = \alpha \Rightarrow 3\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$ . Convine doar  $\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$  ..... **1p**  
 $[x] = 1 \Rightarrow x = \alpha + 1 \Rightarrow 3\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0$ . Convine  $\alpha = \frac{5-\sqrt{13}}{6} \Rightarrow x = \frac{11-\sqrt{13}}{6}$  .. **1p**  
 $[x] = 2 \Rightarrow x = 2$  ..... **1p**

**Problema 2.** Fie

Fie  $x$  și  $y$  două numere naturale astfel încât  $10x + y$  și  $x + 10y$  să fie pătrate perfecte. Arătați că  $xy$  este divizibil prin 121.

**Soluție.** Notăm  $a^2 = 10x + y$ ,  $b^2 = x + 10y$  și adunăm.  
 $a^2 + b^2 = 11(x + y) \Rightarrow (a^2 + b^2) : 11$  ..... **1p**  
 Resturile nenule ale unui pătrat perfect la împărțirea prin 11 sunt  $\{1, 4, 9, 5, 3\}$ .  
 Observăm că nu există două resturi cu suma divizibilă prin 11. În concluzie  $a$  și  $b$  sunt divizibile prin 11 ..... **4p**  
 $11(x + y) = (a^2 + b^2) : 121 \Rightarrow (x + y) : 11$ . Scădem din  $(10x + y) : 11$  și obținem  
 $9x : 11 \Rightarrow x : 11 \Rightarrow y : 11 \Rightarrow xy : 121$  ..... **2p**

**Problema 3.** Fie  $a, b, c$  numere reale strict pozitive astfel încât:  $ab + ac + bc = 12$ . Demonstrați că:

$$\sqrt{\frac{ab}{c^2 + 12}} + \sqrt{\frac{ac}{b^2 + 12}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2 + 12}} \leq \frac{a + b + c}{4}.$$

**Soluție.** Din inegalitatea mediilor avem:  
 $\sqrt{\frac{ab}{c^2 + 12}} = \sqrt{\frac{ab}{c^2 + ab + bc + ac}} = \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right)$  ..... **5p**  
 Scriem inegalitățile analoge, adunăm și obținem:  
 $\sqrt{\frac{ab}{c^2 + 12}} + \sqrt{\frac{ac}{b^2 + 12}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2 + 12}} \leq \frac{3}{2}$  ..... **1p**  
 Mai avem și inegalitatea cunoscută:  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac) = 36$ , deci  
 $a + b + c \geq 6$  și rezultă inegalitatea din enunț ..... **1p**

**Problema suplimentară.** În 11 copaci se află  $n$  vrăbiuțe:  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Din când în când o vrăbiuță se mută dintr-un copac în altul. Notăm cu  $a_i$  numărul de mutări efectuat de vrăbiuța  $v_i$  într-o după-amiază. La sfârșitul după-amiezii se constată că s-au respectat următoarele reguli:

I.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt numere naturale nenule diferite două câte două.

II. Între oricare doi copaci diferiți  $c_i, c_j$  are loc precis o mutare (sau de la  $c_i$  la  $c_j$  sau de la  $c_j$  la  $c_i$ ).

Demonstrați că:

a)  $n \leq 10$ ;

b) Există un același copac printre cei 11 în care nu este nicio vrăbiuță nici la început nici la sfârșit.

**Soluție.** a) Fără a restrânge generalitatea, considerăm  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  și  $T = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  numărul total de mutări. Din condiția II,  $T = 10 + 9 + \dots + 1 = 55$ . Presupunem prin reducere la absurd  $n \geq 11$ . Avem  $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{11} \geq 11 \Rightarrow T \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{11} \geq 66$ , contradicție. Prin urmare  $n \leq 10$ .

b) Din a) deducem că avem cel puțin un copac liber la început și un copac liber la sfârșit. Notăm cu  $C$  mulțimea tuturor copacilor,  $X$  mulțimea copacilor liberi la început  $Z$  mulțimea copacilor liberi la sfârșit și  $Y = C \setminus (X \cup Z)$ . Presupunem prin reducere la absurd că  $X \cap Z = \emptyset$ .

Din II, un copac  $c_i \in X$  a fost implicat în 10 mutări. Notăm cu  $v$  numărul vrăbiuțelor care au venit și  $p$  numărul vrăbiuțelor care au plecat din  $c_i$ . Deoarece  $p + v = 10$ , deducem că  $p$  și  $v$  au aceeași paritate. Cum  $c_i \notin Z$ , obținem  $v - p \geq 2$ . În fiecare copac din  $X$  se află la sfârșit cel puțin două vrăbiuțe. Numărul de vrăbiuțe necesar la sfârșit este:  $n \geq 2|X| + |Y|$ .

Repetăm același raționament pentru  $Z$  și obținem că la început  $n \geq |Y| + 2|Z|$ . Adunăm cele două inegalități și obținem  $2n \geq 2(|X| + |Y| + |Z|) = 22 \Rightarrow n \geq 11$  contradicție cu a). În concluzie  $X \cap Z \neq \emptyset$ .