CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU"
8 - 10 mai 2026
EDIȚIA a XXIV - a

Clasa a XI-a

Problema 1. (a) Arătaţi că $\det(A^2+3A+3I_n) \geqslant 0$, pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Fie G mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care $A^3 = -2A^2$. Determinaţi

$$M = \{\det(A^2+3A+3I_n) \mid A \in G\}.$$

Problema 2. Fie funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Pentru fiecare $n \geqslant 1$, considerăm funcţia $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, liniară pe fiecare dintre intervalele $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, unde $k \in \mathbb{N}$, pentru care

$$f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}.$$

(a) Arătaţi că dacă f este continuă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pentru orice $x \geqslant 0$.
(b) Reciproca este adevărată ?

(Spunem despre o funcţie că este liniară pe un interval, dacă graficul ei pe acel interval se reprezintă printr-un segment)

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $n \geqslant 2$ şi $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
(a) Dacă $\operatorname{rang}(A) = r$, arătaţi că există $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\det(xA+B) = a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Dacă $\operatorname{rang}(A^2-B^2) \leqslant 1$, arătaţi că

$$\det\left(\frac{1}{2}(A^2+B^2)\right) \geqslant \left(\frac{1}{2}(\det A + \det B)\right)^2.$$

Problema suplimentară. Fie funcţiile derivabile $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există şi este pozitivă iar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ nu există. Arătaţi că există un şir a_n cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ pentru care

$$f(a_n)g'(a_n) + f'(a_n) < 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Notă. Timpul de lucru este de 3 ore.
Fiecare dintre primele trei probleme se notează de la 0 la 7 puncte.