CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU"
8 - 10 mai 2026
EDIȚIA a XXIV - a

BAREM - Clasa a XI-a

Problema 1. (a) Arătaţi că $\det(A^2+3A+3I_n) \geqslant 0$, pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Fie G mulţimea matricelor $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care $A^3 = -2A^2$. Determinaţi

$$M = \{\det(A^2+3A+3I_n) \mid A \in G\}.$$

Vladimir Cerbu şi *Mihai Piticari*, Gazeta Matematică

Soluţie. (a) Dacă x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2+3x+3=0$, avem $A^2+3A+3I_n = (A-x_1I_n)(A-x_2I_n)$. Cum $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $x_2 = \overline{x_1}$, avem

$$\det\left(A^2+3A+3I_n\right) = \det(A-x_1I_n)\cdot\overline{\det(A-x_1I_n)} = |\det(A-x_1I_n)|^2 \geq 0$$

.... **3p**

(b) Relaţia $A^3+2A^2 = O_n$ se scrie sub forma $(I_n-A)(A^2+3A+3I_n) = 3I_n$. Trecând la determinanţi, obţinem $\det(I_n-A)\cdot\det(A^2+3A+I_n) = 3^n$ şi cum $\det(A^2+3A+I_n), \det(I_n-A) \in \mathbb{Z}$, iar $\det(A^2+3A+I_n) \geq 0$, rezultă $\det(A^2+3A+I_n) = 3^k$ şi $\det(I_n-A) = 3^{n-k}$, unde $k = \overline{0,n}$. **2p**

Pentru $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ fixat, considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ care are pe diagonala principală primele k elemente egale cu 0 şi următoarele $n-k$ elemente egale cu -2, iar în rest toate elementele 0, adică

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad I_n - A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{pmatrix}$$

Prin calcul deducem că $A^3+2A^2 = O_n$, adică $A \in G$ şi $\det(I_n-A) = 3^{n-k}$, deci $\det(A^2+3A+I_n) = 3^k$.

În concluzie, $M = \{3^k \mid k = \overline{0,n}\}$. **2p**

Problema 2. Fie funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Pentru fiecare $n \geqslant 1$, considerăm funcţia $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, liniară pe fiecare dintre intervalele $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, unde $k \in \mathbb{N}$, pentru care

$$f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}.$$

(a) Arătaţi că dacă f este continuă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, pentru orice $x \geqslant 0$.

(b) Reciproca este adevărată ?

Cristi Săvescu

Soluţie. (a) Fie $x \geq 0$ fixat. Notăm cu $k_n = [nx]$. Atunci $\frac{k_n}{n} \leq x \leq \frac{k_n+1}{n}$.

Deoarece f_n este liniară pe intervalul $\left[\frac{k_n}{n}, \frac{k_n+1}{n}\right]$, există $\lambda_n \in [0,1]$ astfel încât $f_n(x) = \lambda_n f\left(\frac{k_n}{n}\right) + (1-\lambda_n) f\left(\frac{k_n+1}{n}\right)$. Avem $\frac{k_n}{n} \to x$ şi $\frac{k_n+1}{n} \to x$. Cum f este continuă în x, rezultă că $f\left(\frac{k_n}{n}\right) \to f(x)$ şi $f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) \to f(x)$ **2p**

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{k_n+1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \left(f\left(\frac{k_n}{n}\right) - f\left(\frac{k_n+1}{n}\right)\right) = f(x)$, pentru că $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ este mărginit **2p**

(b) Reciproca nu este adevărată. Considerăm funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Această funcție nu este continuă în 0. Pentru această funcție, avem $f_n(0) = 1$, iar pe intervalul $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, funcția f_n este liniară între valorile $f_n(0) = 1$ şi $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Pe toate intervalele $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, unde $k \geqslant 1$, avem valori nule la capete, deci $f_n \equiv 0$ pe aceste intervale. Pentru $x > 0$, dacă $n > \frac{1}{x}$, atunci $x > \frac{1}{n}$, deci $f_n(x) = 0 = f(x)$. Prin urmare $f_n(x) \to f(x)$, pentru orice $x \geqslant 0$, dar f nu este continuă **3p**

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $n \geqslant 2$ şi $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(a) Dacă $\operatorname{rang}(A) = r$, arătaţi că există $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\det(xA + B) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Dacă $\operatorname{rang}(A^2 - B^2) \leqslant 1$, arătaţi că

$$\det\left(\frac{1}{2}(A^2 + B^2)\right) \geqslant \left(\frac{1}{2}(\det A + \det B)\right)^2.$$

Mihai Opincariu

Soluţie. (a) Presupunem că $\operatorname{rang}(A) = r$. Atunci există matricele inversabile $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: J.$$

Fie $C = PBQ$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $P(xA+B)Q = xPAQ + PBQ = xJ + C$, deci $\det(P)\det(xA+B)\det(Q) = \det(xJ+C)$, adică $\det(xA+B) = \frac{\det(xJ+C)}{n^2}$.

În matricea $xJ + C$, variabila x apare numai în primele r poziții diagonale. Din formula Leibniz pentru determinant, fiecare termen al determinantului conține cel mult r factori care depind de x. Rezultă că $\det(xJ+C)$ este un polinom în x de grad cel mult

r. Prin urmare și $\det(xA+B)$ este un polinom în x de grad cel mult r **3p**

(b) Notăm cu $C=\frac{1}{2}(A^2+B^2)$ şi $D=\frac{1}{2}(A^2-B^2)$. Atunci $\operatorname{rang}(D)\leq 1$. Aplicând punctul (a) matricei D, rezultă că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\det(C+xD)$ este un polinom de grad cel mult 1. Observăm că $C+D=A^2$ iar $C-D=B^2$. Prin urmare, $f(1)=\det(A^2)=(\det A)^2$ și $f(-1)=\det(B^2)=(\det B)^2$ **2p**

Deoarece f are grad cel mult 1, avem $f(0)=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$. Astfel $\det\left(\frac{1}{2}(A^2+B^2)\right)=\frac{(\det A)^2+(\det B)^2}{2}$. Rămâne să demonstrăm că $\frac{(\det A)^2+(\det B)^2}{2}\geq\left(\frac{\det A+\det B}{2}\right)^2$, ceea ce se poate proba prin calcul direct **2p**

Problema suplimentară. Fie funcţiile derivabile $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că limita $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ există şi este pozitivă iar $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ nu există. Arătaţi că există un şir a_n cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ pentru care

$$f(a_n)g'(a_n)+f'(a_n)<0,\ \text{pentru orice } n\in\mathbb{N}.$$

Soluţie. Fie $L=\lim_{x\to\infty}f(x)>0$. Atunci există $A>0$ astfel încât $f(x)>0$, pentru orice $x\geq A$. Presupunem, prin reducere la absurd, că nu există un șir $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n\to\infty$, pentru care $f(a_n)g'(a_n)+f'(a_n)<0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Aceasta înseamnă că există $B\geq A$ astfel încât $f(x)g'(x)+f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq B$. Cum $f(x)>0$ pentru orice $x\geq B$, împărțind la $f(x)$, obținem $g'(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}\geq 0$, pentru orice $x\geq B$.

Dar $(g(x)+\ln f(x))'=g'(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}$. Prin urmare, funcția $h(x)=g(x)+\ln f(x)$ este crescătoare pe $[B,\infty)$. Rezultă că h are limită la infinit. Pe de altă parte, deoarece $\lim_{x\to\infty}f(x)=L>0$, avem $\lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\ln L$. Cum $g(x)=h(x)-\ln f(x)$, rezultă că $\lim_{x\to\infty}g(x)$ există, ceea ce contrazice ipoteza.