CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
8 - 10 mai 2026
EDIȚIA a XXIV - a

Clasa a X-a

Problema 1. (a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\log_3 x + 2^x = 9.$$

(b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\log_3(x-1) + 2^{x^2-x} = 1 + 8^x.$$

Problema 2. (a) Arătaţi că pentru orice numere $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, are loc inegalitatea

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \geqslant |ab + bc + cd + da| + \operatorname{Im}(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{d} + d\overline{a}).$$

(b) Determinaţi pentru ce numere $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = \operatorname{Im}(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{d} + d\overline{a}).$$

Problema 3. (a) Fie $n \geqslant 2$. Arătaţi că numărul k-uplurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ cu componente numere naturale, care verifică $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, este C_{n+k-1}^n.

(b) Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \geqslant 2$, pentru care există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $f(k) = n$ iar

$$f(1) \leqslant f(2) \leqslant \cdots \leqslant f(k) \text{ şi } f(k) \geqslant f(k+1) \geqslant \cdots \geqslant f(n).$$

Problema suplimentară. Fie $n \geqslant m \geqslant 2$ şi $\mathcal{F}$ familia funcţiilor surjective $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Arătaţi că

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} |\operatorname{Fix}(f)| = |\mathcal{F}|.$$

Am notat cu $|M|$ *cardinalul mulţimii* M *şi cu* $\operatorname{Fix}(f)$ *mulţimea punctelor fixe ale funcţiei* f, *adică* $\operatorname{Fix}(f) = \Big\{x \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid f(x) = x\Big\}$.

Notă. Timpul de lucru este de 3 ore.
Fiecare dintre primele trei probleme se notează de la 0 la 7 puncte.