



BAREM - Clasa a X-a

Problema 1. (a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\log_3 x + 2^x = 9.$$

(b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\log_3(x - 1) + 2^{x^2-x} = 1 + 8^x.$$

Lucian Dragomir, Gazeta Matematica

Soluție (a) Funcția $f(x) = \log_3 x + 2^x$ este strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare, deci injectivă. Cum $x = 3$ verifică ecuația, deducem că aceasta este singura soluție **3p**

Soluția 1 (b). Adunăm în fiecare membru $\log_3 x$ și obținem o relație echivalentă cu $\log_3 x(x - 1) + 2^{x^2-x} = \log_3 3x + 2^{3x}$ (1) **2p**

Definim funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \log_3 t + 2^t$, care este o funcție strict crescătoare ca sumă de funcții strict crescătoare **1p**

În particular, aceasta este injectivă. Însă relația (1) se scrie $f(x^2 - x) = f(3x)$, de unde deducem că $x^2 = 4x$, iar cum $x > 1$, obținem $x = 4$, care verifică ecuația dată **1p**

Soluția 2 (b). Condiția de existență este ca $x - 1 > 0$, deci $x > 1$. Ecuația se scrie analog $\log_3(x - 1) - 1 = 2^{x^2-x}(2^{4x-x^2} - 1)$ **1p**

Observăm că $x = 4$ este soluție **1p**

Dacă $x > 4$, atunci $\log_3(x - 1) - 1 > 0$ iar $2^{4x-x^2} - 1 < 0$, contradicție **1p**

Dacă $x \in (1, 4)$, atunci $\log_3(x - 1) - 1 < 0$ iar $2^{4x-x^2} - 1 > 0$, contradicție **1p**

Problema 2. (a) Arătați că pentru orice numere $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, are loc inegalitatea

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \geq |ab + bc + cd + da| + \text{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{a}).$$

(b) Determinați pentru ce numere $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ are loc egalitatea

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = \text{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{a}).$$

Mihai Opincariu

Soluție. (a) Fie $x = a+c$, $y = b+d$, $u = a-c$ și $v = b-d$. Atunci $ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d) = xy$ iar $\text{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{a}) = \text{Im}((a-c)\overline{(b-d)}) = \text{Im}(u\bar{v})$, unde am folosit că $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$. Prin formula paralelogramului, $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 =$

$\frac{|x|^2+|y|^2+|u|^2+|v|^2}{2}$. Cum $|x||y| \leq \frac{|x|^2+|y|^2}{2}$, avem $\text{Im}(u\bar{v}) \leq |u||v| \leq \frac{|u|^2+|v|^2}{2}$ și rezultă $|ab+bc+cd+da| + \text{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{a}) \leq |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \dots\dots\dots$ **4p**

(b) Avem $\text{Im}(x\bar{y}) \leq |x||y| \leq \frac{|x|^2+|y|^2}{2}$. Pentru perechile $(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)$, avem $\text{Im}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d} + d\bar{a}) \leq |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă în fiecare pereche avem egalitate, adică $a = ib, b = ic, c = id$ și $d = ia$.

Rezultă $b = -ia, c = -a$ și $d = ia$. Prin urmare toate soluțiile sunt $(a, b, c, d) = (z, -iz, -z, iz)$, unde $z \in \mathbb{C}$, care verifică $\dots\dots\dots$ **3p**

Problema 3. (a) Fie $n \geq 2$. Arătați că numărul k -uplurilor (x_1, x_2, \dots, x_k) cu componente numere naturale, care verifică $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, este C_{n+k-1}^n .

(b) Determinați numărul funcțiilor $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, unde $n \geq 2$, pentru care există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $f(k) = n$ iar

$$f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(k) \text{ și } f(k) \geq f(k+1) \geq \dots \geq f(n).$$

Cristi Săvescu

Soluție (a) Amintim principiul *stars and bars*, care afirmă că numărul soluțiilor naturale (x_1, x_2, \dots, x_k) ale ecuației $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ este $C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$ (*). Justificarea este că cele n unități pot fi privite ca n stele așezate în linie iar o soluție este asociată cu un set de $k-1$ bare care se pun printre aceste stele pentru a le separa în grupuri de câte x_1, x_2, \dots, x_k . Avem $n+k-1$ poziții în care pot fi stelele și barele și trebuie să alegem $k-1$ poziții pentru bare. Atunci, avem $C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^n$ soluții. **2p**

Soluția 1 (b). Privim funcția f ca un cuvânt de forma

$$C = \overline{f(1)f(2) \dots f(n)} = \overline{f(1)f(2) \dots nnn \dots nf(p)f(p+1) \dots f(n)},$$

unde n apare de N ori. Fie a_k și b_k numărul de apariții ale lui k de la stânga, respectiv de la dreapta blocului de N de n -uri, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Atunci avem $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + N + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 = n$ (1), cu condiția ca n să apară cel puțin o dată, deci $N \neq 0$. Reciproc, oricărei soluții $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, N, b_{n-1}, \dots, b_1)$ cu componente naturale ale ecuației (1), pentru care $N \neq 0$, îi putem asocia o funcție cu proprietatea dată, deci numărul acestora este egal cu numărul de astfel de soluții \dots **3p**

Conform (*), ecuația (1) are $C_{n+2n-2}^{2n-2} = C_{3n-2}^n$ soluții. Din acestea excludem pe cele în care $N = 0$, care sunt soluții ale ecuației $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_1 = n$. Acestea sunt, conform (2), în număr de C_{n+2n-3}^n , deci numărul de soluții $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, N, b_{n-1}, \dots, b_1)$ cu componente naturale ale ecuației de mai sus, pentru care $N \neq 0$, este $C_{3n-2}^n - C_{3n-3}^n = C_{3n-3}^{n-1} \dots\dots\dots$ **2p**

Soluția 2 (b). O funcție cu proprietatea dată este caracterizată de platoul $[a, b] \cap \mathbb{N}^*$, unde $a \leq b$, pentru care $f(a) = f(a+1) = \dots = f(b) = n$, restricția crescătoare $f_0 : \{1, \dots, a-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$ și restricția descrescătoare $f_1 : \{b+1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Funcția f_0 poate fi aleasă în C_{n+a-3}^{a-1} moduri iar f_1 în $C_{n-b+n-2}^{m-b}$ moduri, cu convenția $C_0^0 = 1$.

Atunci, numărul cerut este
$$N = \sum_{1 \leq a \leq b \leq n} C_{n+a-3}^{a-1} \cdot C_{n-b+n-2}^{m-b} = \sum_{1 \leq a \leq b \leq n} C_{n+a-3}^{m-2} \cdot C_{2n-b-2}^{m-2},$$
 deci
$$N \stackrel{p=n-2}{=} \sum_{1 \leq a \leq b \leq n} C_{p+a-1}^p \cdot C_{p+n-b}^p = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq n-1}} C_{p+i}^p \cdot C_{p+j}^p = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} C_{p+i}^p \cdot C_{p+j}^p$$

$$C_{p+j}^p = \sum_{i=0}^{n-1} \left(C_{p+i}^p \cdot \sum_{j=0}^{n-1-i} C_{p+j}^p \right) \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

Avem identitatea $\sum_{j=0}^t C_{p+j}^p = C_{p+t+1}^{p+1}$ (1), care este echivalentă cu $\sum_{j=0}^t \frac{(p+j)!}{p! \cdot j!} = \frac{(p+t+1)!}{(p+1)! \cdot t!}$, sau $\sum_{j=0}^t \frac{(p+j)!}{j!} = \frac{(p+t+1)!}{(p+1) \cdot t!}$. Pentru $t = 0$ avem $p! = \frac{(p+1)!}{p+1}$, care este adevărat. Dacă $\sum_{j=0}^t \frac{(p+j)!}{j!} = \frac{(p+t+1)!}{(p+1) \cdot t!}$, atunci $\sum_{j=0}^{t+1} \frac{(p+j)!}{j!} = \frac{(p+t+1)!}{(p+1) \cdot t!} + \frac{(p+t+1)!}{(t+1)!} = \frac{(p+t+1)!}{t!} \cdot \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{t+1} \right) = \frac{(p+t+1)!}{t!} \cdot \frac{p+t+2}{(p+1)(t+1)} = \frac{(p+t+2)!}{(p+1) \cdot (t+1)!}$, deci relația este demonstrată prin inducție $\dots \dots \dots \mathbf{2p}$

Avem identitatea lui Vandermonde $\sum_{i=0}^t C_{m+i}^m \cdot C_{n+t-i}^n = C_{m+n+t+1}^{m+n+1}$ (2). Considerăm un șir de t stele și $m+n+1$ bare. Numărul de moduri pentru a așeza cele $m+n+1$ bare printre cele t stele este $C_{m+n+t+1}^{m+n+1}$. Fie $i \in \{0, 1, \dots, t\}$. Numim bară centrală bara cu numărul $m+1$ privind de la stânga la dreapta. Putem alege i stele și m bare în stânga bării centrale, deci în C_{m+i}^m moduri și $t-i$ stele și n bare în dreapta bării centrale, deci în C_{n+t-i}^n moduri. Din regula produsului ne rezultă (2). Atunci
$$N \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} C_{p+i}^p \cdot C_{p+n-i}^{p+1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{p+i}^p \cdot C_{(p+1)+(n-1)-i}^{p+1} \stackrel{(2)}{=} C_{2p+n+1}^{2p+2} = C_{2p+n+1}^{m-1} = C_{3n-3}^{m-1} \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

Problema suplimentară. Fie \mathcal{F} familia funcțiilor surjective $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$, unde $n \geq m \geq 2$. Arătați că

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} |\text{Fix}(f)| = |\mathcal{F}|.$$

Soluția 1. Fie $S = \{(f, i) \mid f \in \mathcal{F}, i \in \{1, \dots, m\}, f(i) = i\}$. Atunci, pentru un $f \in \mathcal{F}$, numărul indicilor i cu $(f, i) \in S$ este chiar $|\text{Fix}(f)|$. Prin urmare,

$$|S| = \sum_{f \in \mathcal{F}} |\text{Fix}(f)|.$$

Dar $|S| = \sum_{i=1}^m |\{f \in \mathcal{F} \mid f(i) = i\}|$. Prin simetrie, avem $|\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1\}| = |\{f \in \mathcal{F} \mid f(i) = i\}|$, pentru orice $i = 1, \dots, m$, deci $|S| = m \cdot |\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1\}|$.

Dar și mulțimile $\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = j\}$, unde $j = 1, \dots, m$, au toate același cardinal și partiționează \mathcal{F} , deci $|\mathcal{F}| = \sum_{j=1}^m |\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = j\}| = m \cdot |\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1\}| = |S|$.

Soluția 2. Notăm cu $F_k = \{(f, k) \in \mathcal{F} \times \{1, 2, \dots, m\} \mid f(k) = k\}$, pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Atunci $\sum_{f \in \mathcal{F}} |\text{Fix}(f)| = \sum_{k=1}^m |F_k|$ (1). Fie $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ fixat.

Pentru ca $f \in F_k$ trebuie ca $f(k) = k$ și $\{1, 2, \dots, m\} \setminus \{k\} \subseteq f(\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\})$, adică în punctele $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$, funcția f trebuie să ia măcar o dată fiecare dintre valorile $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m$.

Fie $T = \{f \in \mathcal{F} \mid f(k) = k\}$ și $S_i = \{f \in T \mid i \notin \text{Im}(f)\}$. Atunci, dacă notăm cu $B = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{k-1} \cup S_{k+1} \cup \dots \cup S_m$, avem $|F_k| = |T \setminus B| = m^{n-1} - |B|$.

Din P.I.E., $|B| = \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^{t+1} \prod_{\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{k\}} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_t}|$. Dar $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_t} = \{f \in T \mid \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \cap \text{Im}(f) = \emptyset\}$, deci $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_t}| = (m-t)^{n-1}$ și atunci $|B| = \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^{t+1} C_{m-1}^t (m-t)^{n-1}$, deci

$$|F_k| = m^{n-1} + \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^t C_{m-1}^t (m-t)^{n-1} = \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t C_{m-1}^t (m-t)^{n-1}. \quad (2)$$

Din relația (1) avem $\sum_{f \in \mathcal{F}} |\text{Fix}(f)| = \sum_{k=1}^m |F_k| \stackrel{(2)}{=} m \cdot \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t C_{m-1}^t (m-t)^{n-1} = \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t C_m^t (m-t)^n$ (3).

Fie $V_i = \{f \in \mathcal{F} \mid i \notin \text{Im}(f)\}$. Atunci, dacă notăm cu $C = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, avem $|F| = m^n - |C|$. Similar cu raționamentul de mai sus, avem $|C| = \sum_{t=1}^m (-1)^{t+1} C_m^t (m-t)^n$, deci $|F| = m^n + \sum_{t=1}^m (-1)^t C_m^t (m-t)^n = \sum_{t=0}^m (-1)^t C_m^t (m-t)^n$ (4). Din (3) și (4), q.e.d.