CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„DIMITRIE POMPEIU”
13 - 15 mai 2022
EDIȚIA a XX - a

CLASA a VII - a

BAREM

SUBIECTUL I

a) Arătați că numărul $a = \sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2} + \sqrt{9-4\sqrt{2}}$ este număr natural.

b) Dacă a, b, c, d sunt numere întregi astfel încât $a + b + c + d = 0$, demonstrați că numărul $\sqrt{(ab-cd)(bc-ad)(ac-bd)}$ este natural.

Din oficiu 1p

a) $9-4\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2}-1\right)^2$ 1p

$a = \left|2\sqrt{2}-3\right| + \left|2\sqrt{2}-1\right|$ 1p

$a = 2$, care este număr natural 1p

b) $a + b + c + d = 0 \Rightarrow -d = a + b + c$

$ab - cd = ab + c\cdot(a + b + c) = ab + ac + bc + c^2 = (a + c)(b + c)$ 1p

$bc - ad = (a + b)(a + c)$ și $ac - bd = (a + b)(b + c)$ 1p

$\sqrt{(ab-cd)(bc-ad)(ac-bd)} = |a+b|\cdot|b+c|\cdot|a+c|$

Deoarece a, b, c sunt numere întregi, $|a+b|\cdot|b+c|\cdot|a+c|$ este număr natural 1p

SUBIECTUL II

Determinați numerele întregi nenule x, y, z știind că $x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001$.

Din oficiu 1p

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001 - x$ este număr întreg și $-2 \le \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 2$ 1p

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -2 \Rightarrow y = z = -1$, $x = 2003$ 1p

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -1 \Rightarrow y = z = -2$, $x = 2002$ 1p

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = z = 2$, $x = 2000$ 1p

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow y = z = 1$, $x = 1999$ 1p

$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow y = a$, $z = -a$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $x = 2001$ 1p

Soluție alternativă: Se demonstrează că $y \mid z$ și $z \mid y$ (2p)

Se analizează cazurile $y = -z$ (1p) și $y = z$ (3p)

SUBIECTUL III

a) Fie punctele A și B astfel încât $AB = 5$ cm și cercurile $\mathcal{C}_1$ de centru A și rază $\sqrt{5}$ cm și $\mathcal{C}_2$ de centru B și rază $2\sqrt{5}$ cm. Arătați că cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt secante și aflați lungimea coardei comune celor două cercuri.

b) Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și punctele E și F pe latura CD astfel încât $AE \parallel BC$ și $BF \parallel AD$. Să se demonstreze că $AB^2 = CE \cdot DF$.

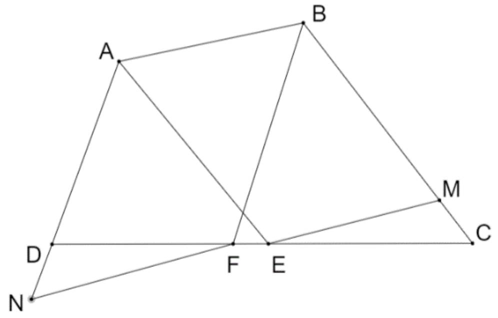
Din oficiu 1p

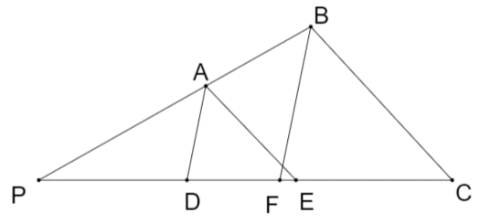
a) Cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt secante $\Leftrightarrow$ $\left|\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right| < AB < \sqrt{5}+2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5} < \sqrt{25} < \sqrt{45}$ adevărat 1p

Notăm $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{M, N\}$ și $MN \cap AB = \{P\}$.

AB este mediatoarea MN, triunghiul AMB este dreptunghic în M 1p

$MP = 2$ cm $\Rightarrow MN = 4$ cm 1p





b) Dacă $AB \parallel CD$, atunci $AB = CE = DF$ și evident $AB^2 = CE \cdot DF$ 1p

Dacă $AB \nparallel CD$, construim $EM \parallel AB$, $M \in BC$ și $FN \parallel AB$, $N \in AD$.

Deoarece $ABCD$ este patrulater inscriptibil avem $\measuredangle A + \measuredangle C = 180^\circ$ și $\measuredangle B + \measuredangle D = 180^\circ$

Folosind proprietățile unghiurilor din paralelogramele $ABME$ și $ABFN$, se arată că triunghiurile MCE și DNF au două unghiuri respectiv congruente 1p

Din asemănarea triunghiurilor MCE și DNF obținem $ME \cdot NF = CE \cdot DF$, de unde se deduce $AB^2 = CE \cdot DF$ 1p

Soluție alternativă:

b) Dacă $AB \parallel CD$, atunci $AB = CE = DF$ și evident $AB^2 = CE \cdot DF$ 1p

Dacă $AB \nparallel CD$, notăm $AB \cap CD = \{P\}$

Aplicând teorema lui Thales în triunghiurile PBC și respectiv PBF, se obțin relațiile

$AB = \dfrac{PB \cdot EC}{PC}$ și respectiv $AB = \dfrac{PB \cdot DF}{PF}$ 1p

Se demonstrează că triunghiurile PBC și PFB sunt asemenea, se obține $PB^2 = PC \cdot PF$, de unde se deduce $AB^2 = CE \cdot DF$ 1p